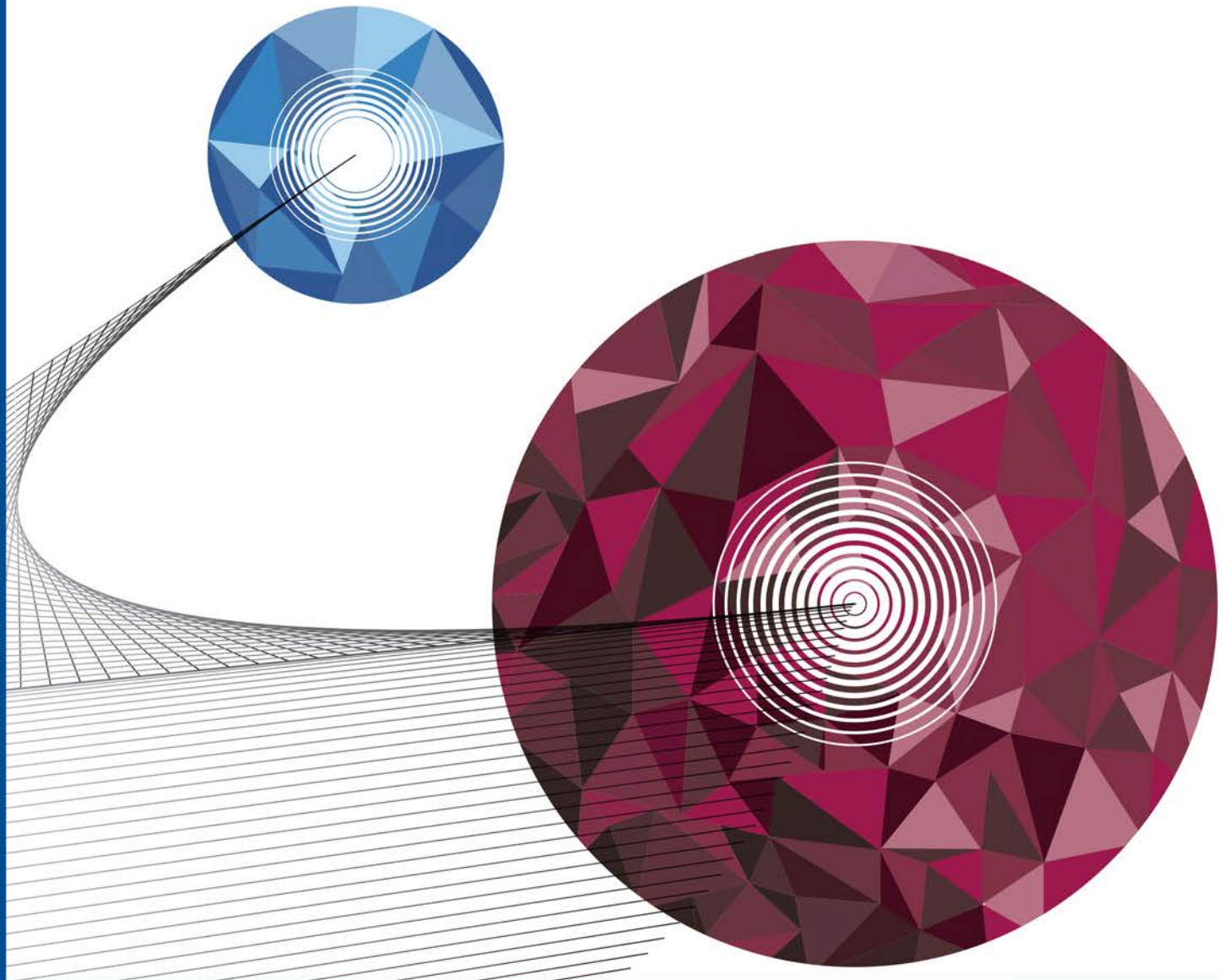
Benjamín Garza Olvera

Geometría y trigonometría

Segunda edición



ALWAYS LEARNING

PEARSON

Geometría y trigonometría

Geometría y trigonometría

Benjamín Garza Olvera

Revisión técnica

Juan Ramón López Váldez
Secretario de Academia Estatal
Centro de Bachillerato
Tecnológico industrial y de Servicios No.157
"Gral. Vicente Ramón Guerrero Saldana" (CBTIS 157)
Villa de Álvarez, Colima, México

Daniel Chagoya Gallardo
Jefe del Departamento de Servicios Docentes
Centro de Estudios Tecnológicos Industrial y de Servicios No. 166
"Carmen Serdán Alatriste" (CETIS 166)
Distrito Federal, México

Juan Antonio Jiménez Gallegos
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y
Tecnología Avanzada del IPN

PEARSON

Datos de catalogación

Autor: Garza Olvera, Benjamín.

Geometría y trigonometría
Matemáticas II, educación media superior
2ª Edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2015
ISBN: 978 607 32 3064 3

Área: Bachillerato/Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 264

Geometría y trigonometría

El proyecto didáctico *Geometría y trigonometría* es una obra colectiva creada por encargo de la editorial Pearson Educación de México, S.A. de C.V. por un equipo de profesionales en distintas áreas, que trabajaron siguiendo los lineamentos y estructuras establecidos por el Departamento Pedagógico de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Especialistas en geometría y trigonometría responsables de los contenidos y su revisión técnico-pedagógica:
Obra original: Benjamín Garza Olvera
Revisión técnico-pedagógica: Juan Ramón López Váldez, Daniel Chagoya Gallardo y Juan Antonio Jiménez Gallegos

■ **Dirección general:** Sebastián Rodríguez ■ **Dirección de contenidos y servicios digitales:** Alan Palau ■ **Gerencia de contenidos K-12:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Gerencia de arte y diseño:** Asbel Ramírez ■ **Coordinación de bachillerato y custom:** Lilia Moreno ■ **Edición sponsor:** Berenice Torruco ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Supervisión de arte y diseño:** Enrique Trejo ■ **Asistencia editorial:** José Huerta ■ **Edición de desarrollo:** Kenyi Casillas ■ **Corrección de estilo:** Juan Carlos Hurtado ■ **Lectura de pruebas:** Demetrio Alemán ■ **Diseño de portada:** Pulso Comunicación ■ **Diagramación:** Ediciones OVA.

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-3064-3
ISBN E-BOOK: 978-607-32-3070-4
ISBN E-CHAPTER: 978-607-32-3069-8

D.R. © 2015 por Pearson Educación de México, S. A. de C. V.
Avenida Antonio Dovalí Jaime # 70.
Torre B, Piso 6, Colonia Zedec Ed Plaza Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón, México, Distrito Federal C. P. 01210

Impreso en México. *Printed in Mexico*.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 17 16 15 14

PEARSON

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.
El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

www.pearsonenespañol.com

Contenido

Geometría y trigonometría

PRESENTACIÓN, xi

UNIDAD **1** Introducción a la geometría euclidiana, 1

Evaluación diagnóstica, 2

Introducción a la geometría euclidiana, 4
- Definición de geometría, 4
- División de la geometría, 4
  - Geometría plana, 4
  - Geometría del espacio o espacial, 4
  - Geometría analítica, 4
  - Geometría descriptiva, 4
  - EJERCICIO **1**, 4

Antecedentes históricos de la geometría, 5
- Sumerios y babilonios, 5
- Egipcios, 5
- Griegos, 5
- Tales de Mileto, 5
  - Teorema de Tales de Mileto, 6
- Pitágoras de Samos, 6
- Euclides de Alejandría, 6
  - Libro I, 6
  - Libro II, 6
  - Libro III, 6
  - Libro IV, 6
  - Libro V, 6
  - Libro VI, 6
  - Libros VII, VIII y IX, 6
  - Libro X, 6
  - Libros XI y XII, 6
  - Libro XIII, 6
- Platón, 7
  - Los tres problemas más famosos de la geometría antigua, 7
- Arquímedes de Siracusa, 7
- Apolonio de Perga, 7
- Herón de Alejandría, 7
  - EJERCICIO **2**, 8

Las relaciones y los silogismos, 9
- Relaciones, 9
- Silogismos, 10
  - EJERCICIO **3**, 11

Finalidad de los procesos inductivo y deductivo, 12
- Razonamiento inductivo, 12
- Razonamiento deductivo, 13
  - EJERCICIO **4**, 13

Conceptos básicos de la geometría euclidiana, 14
- Conceptos no definidos, 14
- Cuerpo físico y cuerpo geométrico, 14
- Superficie, 15
  - EJERCICIO **5**, 15

Los axiomas y postulados de la geometría, 16
- Proposiciones matemáticas, 16
- Axioma, 16
- Postulado, 16
- Definición, 17
  - EJERCICIO **6**, 18

Deducción de teoremas, corolarios y lemas, 19
- Teorema, 19
- Corolario, 20
- Lema, 20
- Teorema recíproco, 20
  - Teorema directo, 21
  - Teorema recíproco, 21
  - Explicación, 21
  - Demostración de teoremas, 21
  - Teorema, 21
  - EJERCICIO **7**, 22

Autoevaluación, 23

UNIDAD **2** Rectas, 25

Evaluación diagnóstica, 26

Algunos conjuntos de puntos, 28
- Concepto de punto, 28
- Línea, 28
  - Línea recta, 28
  - Notación, 28
  - Línea curva, 29

Línea quebrada o poligonal, 29
Curva simple cerrada, 29
Poligonal simple cerrada, 29
Línea mixta, 29
Plano, 29
Puntos colineales, 30
Puntos coplanares, 30
Semiplano, 31
Postulado de la división del plano, 31
Intersección de planos, 31
EJERCICIO **8**, 31

Posición relativa de dos rectas en el plano, 34
Posición relativa de una recta y un plano, 34
Representación gráfica de las posiciones relativas de una recta y un plano, 34
Posición relativa de dos rectas y un plano, 34
Representación gráfica de las posiciones relativas de dos rectas y un plano, 34
Posiciones relativas de dos planos, 35
EJERCICIO **9**, 35

Rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas, 36
Definición de rectas perpendiculares, 36
Carácter recíproco de la perpendicularidad, 36
Mediatriz, 36
Teorema, 36
Recíproco, 37
Postulado, 37
Teorema, 37
Recíproco, 37
Distancia de un punto a una recta, 38
Definición de rectas oblicuas, 38
Corolarios, 38
Definición de rectas paralelas, 39
Carácter recíproco del paralelismo, 39
Carácter idéntico del paralelismo, 39
Postulado de Euclides, 39
Corolario primero, 39
Corolario segundo, 39
Corolario tercero, 40
Teorema, 40
Corolario, 40
EJERCICIO **10**, 41

Distinción y notación de segmento, rayo y recta, 44
Recta, 44
Semirrecta o rayo, 44
Segmento, 44
EJERCICIO **11**, 45

Medida de los segmentos rectilíneos, 46
Segmentos orientados (vectores), 46
Segmentos consecutivos, 46
Medida de segmentos, 46
EJERCICIO **12**, 47

Congruencia de segmentos, 48
Igualdad y desigualdad de segmentos, 48
Congruencia de segmentos, 48
Caracteres de la igualdad de segmentos, 48
Carácter idéntico o reflejo, 49
Carácter recíproco o simétrico, 49
Carácter transitivo, 49
Trazo de segmentos congruentes, 49
EJERCICIO **13**, 49

Operaciones con segmentos, 50
Suma de segmentos, 50
Definición I, 50
Definición II, 50
Sustracción de segmentos, 51
Multiplicación de un segmento (producto de un segmento por un escalar), 51
Postulado de Arquímedes, 51
División de un segmento, 52
EJERCICIO **14**, 53

Autoevaluación, 55

UNIDAD **3** Ángulos, 57

Evaluación diagnóstica, 58

Definición y notación de ángulo, 60
Definición de ángulo, 60
Nomenclatura de ángulo, 60
Bisectriz del ángulo, 61
Trazo de la bisectriz del ángulo, 61
Generación de los ángulos, 62
EJERCICIO **15**, 62

Sistemas empleados en la medida de ángulos, 63
Medidas de ángulos, 63
Sistema sexagesimal, 64
Sistema centesimal, 64
Sistema circular, 64
EJERCICIO **16**, 65

Conversión de grados a radianes y viceversa, 66
Relación entre grado sexagesimal y el radián, 66
Equivalencias de uso común, 66
Solución de problemas, 67
EJERCICIO **17**, 69

Medición y trazo de ángulos, 70
Introducción, 70
Medición, 71
Trazo, 71
EJERCICIO **18**, 72

Congruencia de ángulos, 75
Ángulos congruentes, 75
Trazo de ángulos congruentes, 75
EJERCICIO **19**, 76

Clasificación de los ángulos, 77
Ángulos convexos y cóncavos, 77
Clasificación de los ángulos por sus medidas, 77
Ángulo agudo, 77
Ángulo recto, 77
Ángulo obtuso, 77
Ángulo colineal o llano, 78
Ángulo entrante, 78
Ángulo perígono, 78
Diferentes clases de ángulos, 78
Ángulos consecutivos, 78
Ángulos adyacentes, 79
Ángulos opuestos por el vértice, 79
EJERCICIO **20**, 79

Ángulos complementarios, suplementarios y conjugados, 81
Ángulos complementarios, 81
Complemento de un ángulo, 81
Ángulos suplementarios, 81
Suplemento de un ángulo, 81
Ángulos conjugados, 81
Conjugado de un ángulo, 81
EJERCICIO **21**, 82

Ángulos que determinan dos rectas cortadas por una transversal (secante), 84
Ángulos interiores o internos, 84
Alternos internos, 84
Colaterales internos, 84
Ángulos exteriores o externos, 85
Alternos externos, 85
Colaterales externos, 85
Ángulos correspondientes, 85
EJERCICIO **22**, 86

Demostración de teoremas sobre ángulos, 87
Teorema I, 87
Teorema 2, 88
Teorema 3, 88
Teorema 4, 89
Teorema 5, 89
Teorema 6, 90
Teorema 7, 91
Teorema 8, 91
Teorema 9, 92
Teorema 10, 93
Teorema 11, 93
Teorema 12, 94
Teorema 13, 94
Teorema 14, 95
EJERCICIO **23**, 95

Autoevaluación, 97

UNIDAD **4** Triángulos, 99

Evaluación diagnóstica, 100

Definición, notación y clasificación de triángulos, 102
Definición de triángulo, 102
Notación de triángulos, 102
Clasificación de los triángulos, 102
Clasificación de acuerdo a sus lados, 102
Equiláteros, 102
Isósceles, 103
Escalenos, 103
Clasificación de acuerdo a sus ángulos, 103
Acutángulos, 103
Rectángulos, 103
Obtusángulos, 104
EJERCICIO **24**, 104

Rectas y puntos notables del triángulo, 105
Incentro, 105
Bisectriz del ángulo, 105
Circuncentro, 105
Mediatriz, 106
Ortocentro, 106
Altura del triángulo, 106
Gravicentro, baricentro o centro de gravedad, 107

Mediana, 107
EJERCICIO **25**, 108

Teoremas para ángulos internos y externos de un triángulo, 108
Teorema para ángulos internos de un triángulo, 108
Corolario, 109
Teoremas para ángulos externos de un triángulo, 109
Teorema, 110
EJERCICIO **26**, 110

Igualdad o congruencia de triángulos, 112
Congruencia de triángulos, 112
Criterios empleados en la congruencia de triángulos, 112
Criterios empleados en la congruencia de triángulos rectángulos, 113
Propiedades de los triángulos congruentes, 115
Aplicaciones de la igualdad de triángulos, 115
EJERCICIO **27**, 115

Teorema de Tales y sus aplicaciones, 117
Teorema de Tales, 117
Aplicación del teorema de Tales a los triángulos, 118
EJERCICIO **28**, 119

Semejanza de triángulos, 120
Concepto de semejanza, 120
Triángulos semejantes, 120
Caracteres de la semejanza de triángulos, 120
Teorema fundamental de la semejanza de triángulos, 120
Teorema recíproco del fundamental de la semejanza de triángulos, 121
Casos de la semejanza de triángulos, 121
Casos de semejanza de triángulos rectángulos, 124
Proporcionalidad de las alturas de dos triángulos semejantes, 125
Teorema, 125
EJERCICIO **29**, 125

Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones, 127
Teorema de Pitágoras, 127
Aplicaciones del teorema de Pitágoras, 129
Clasificación de un triángulo al conocer los tres lados, 130
EJERCICIO **30**, 131

Área, perímetro y semiperímetro de triángulos, 133
Área, 133
Área del triángulo, 133
Cálculo de las alturas de un triángulo, 133
Área del triángulo en función de sus lados (fórmula de Herón), 134
Área de un triángulo equilátero en función del lado, 134
Perímetro, 134
Semiperímetro, 134
EJERCICIO **31**, 136

Autoevaluación, 138

UNIDAD **5** Polígonos, 139

Evaluación diagnóstica, 140

Definición, notación y clasificación de polígonos, 142
Definición de polígono, 142
Notación, 142
Poligonal abierta, 143
Poligonal cerrada, 143
Clasificación de los polígonos, 143
EJERCICIO **32**, 145

Diagonales y ángulos de un polígono, 147
Suma de ángulos interiores, 147
Teorema, 148
Corolario, 148
Suma de ángulos exteriores (teorema), 148
Corolario, 148
Número de diagonales (teorema), 148
Teorema, 148
EJERCICIO **33**, 151

Cuadriláteros: propiedades, clasificación y trazos, 153
Definición de cuadrilátero, 153
Notación, 153
Propiedades de los cuadriláteros, 153
Representación gráfica de las propiedades, 154
Clasificación de cuadriláteros, 154
Trazos en cuadriláteros, 157
EJERCICIO **34**, 158

Autoevaluación, 160

UNIDAD 6 Circunferencia y círculo, 161

Evaluación diagnóstica, 162

Definición, notación y elementos en una circunferencia, 164
- Definición de circunferencia, 164
- Definición de círculo, 164
- Puntos interiores y exteriores de la circunferencia, 164
- Notación, 164
- Elementos de la circunferencia, 165
  - Arco, 165
  - Cuerda, 165
  - Diámetro, 165
  - Flecha o sagita, 165
  - EJERCICIO **35**, 166

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia, 167
- Secante, 167
- Tangente, 167
- Exterior, 168
  - EJERCICIO **36**, 168

Figuras y ángulos en el círculo, 169
- Figuras en el círculo, 169
  - Segmento circular, 169
  - Semicírculo, 169
  - Sector circular, 169
  - Cuadrante circular, 169
  - Corona circular, 170
  - Trapecio circular, 170
- Ángulos en el círculo, 170
  - Ángulo central, 170
  - Ángulo inscrito, 170
  - Ángulo excéntrico, 171
  - Ángulo exterior, 171
  - EJERCICIO **37**, 171

Autoevaluación, 173

UNIDAD 7 Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo, 175

Evaluación diagnóstica, 176

Definición de trigonometría y relaciones trigonométricas, 178
- Definición de trigonometría, 178
- Trigonometría plana, 178
- Trigonometría esférica, 178
- Diferencias generales entre la geometría y trigonometría, 178
- Las relaciones trigonométricas, 178
- Las funciones trigonométricas en el círculo, 179
- Definición de las funciones trigonométricas en coordenadas rectangulares, 180
  - EJERCICIO **38**, 181

Aplicaciones de las funciones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos, 182
- Primera aplicación, 182
- Segunda aplicación, 184
- Uso de las tablas de valores naturales, 185
- Funciones trigonométricas inversas, 186
- Tercera aplicación, 187
  - EJERCICIO **39**, 189

Funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, 193
- El ángulo de cualquier magnitud, 193
- Signos de las funciones trigonométricas, 194
- Resumen de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que limitan los cuadrantes, 197
- Funciones trigonométricas de ángulos notables en el primer cuadrante (30°, 45°, 60°), 197
- Funciones trigonométricas de ángulos notables en el segundo cuadrante (120°, 135°, 150°), 199
- Funciones trigonométricas de ángulos notables en el tercer cuadrante (210°, 225°, 240°), 200
- Funciones trigonométricas de ángulos notables en el cuarto cuadrante (300°, 315°, 330°), 202
  - EJERCICIO **40**, 203

Relaciones numéricas entre las funciones trigonométricas, 205
- Sistema de coordenadas rectangulares, 205
- Gráfica de los puntos, 205
- Relación numérica entre las funciones, 207
  - EJERCICIO **41**, 209

Identidades trigonométricas, 211
- Definición de identidad trigonométrica, 211
- Funciones trigonométricas recíprocas, 211
- Fórmulas fundamentales o identidades principales, 212
  - Aplicaciones, 213

Resumen de las funciones, 214
Comprobación de identidades trigonométricas, 214
EJERCICIO **42**, 216

Relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos (leyes de senos, cosenos y tangentes), 217
Ley de los senos, 218
Aplicación de la ley de los senos, 219
Ley de los cosenos, 221
Demostración de la ley en un triángulo obtusángulo, 222
Aplicación de la ley de los cosenos, 222
Ley de las tangentes, 225
Demostración de la ley en un triángulo acutángulo, 225
Aplicación de la ley de las tangentes, 227
EJERCICIO **43**, 229

Autoevaluación, 232

Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos, 233

Presentación

Este libro se escribió pensando en estudiantes de bachillerato tecnológico que han completado un primer curso de matemáticas. El objetivo principal fue escribir una obra que ustedes los estudiantes pudieran leer, entender y disfrutar. A lo largo del libro se utiliza un lenguaje claro y preciso que propicia la generación de conocimientos que, por lo general, resultan difíciles de entender y aprender. Se utilizan oraciones cortas, explicaciones claras y muchos ejemplos resueltos a detalle. La didáctica que se desarrolla en el texto se fundamenta en una exposición de conceptos introductorios y ejemplos demostrativos, así como, una diversificación en el planteamiento del problema. Los problemas, ejercicios y prácticas que se desarrollan a lo largo de las unidades utilizan distintos tipos de reactivos, lo cual permite tener una evaluación continua del proceso enseñanza-aprendizaje. Se hace énfasis en el incremento gradual de la complejidad de cada ejercicio hasta lograr el cambio de la memorización por un razonamiento más analítico en el planteamiento y desarrollo del proceso de solución de un problema determinado. El verdadero éxito de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas, consiste en analizar y comprender su interrelación con las demás asignaturas, así como, su aplicación con el medio cotidiano en el que nos desarrollamos.

Los contenidos de este libro tienen como propósito facilitar el estudio de las matemáticas, asimismo este material apoya a los doctores y facilita la unificación de criterios de enseñanza, elevando así, la calidad de aprendizaje.

He escrito diversos textos que se caracterizan por presentar diversos elementos que faciliten los métodos y técnicas de enseñanza-aprendizaje, mediante secuencias programadas y estructuradas con temas que permiten dar respuestas sólidas y concretas a las múltiples interrogantes de los estudiantes, induciendo de forma natural al aprendizaje y ejercitación de la matemática en forma práctica.

Agradezco el apoyo de cada uno de los compañeros de academia local, estatal y nacional para la revisión de este material. Asimismo, a todas las autoridades educativas que confiaron en mi esfuerzo y dedicación para lograr contenidos de alta calidad. De igual forma, agradezco al editor por su esmerada atención a la impresión de esta obra. Por último a mis exalumnos y en especial a mi familia a quienes distingo con este mensaje filosófico. "*El éxito al igual que el futuro no se espera, se construye con ahínco; no es tanto una meta que se alcanza, sino un camino que se recorre con vigor y energía*".

EL AUTOR
Q. I. y *Lic. Benjamín Garza Olvera*

Metodología para el trabajo con este material

El material está dividido en siete unidades, donde se desarrollan los contenidos actuales del programa general de bachillerato tecnológico. Cada unidad cuenta con una evaluación diagnóstica, el desarrollo de los diversos temas y una autoevaluación.

Evaluación diagnóstica

Es una serie de ejercicios que sirven como repaso operativo, pero en general se busca desarrollar habilidades de lógica, aritmética y álgebra.

Cuadros de competencias genéricas y disciplinares

Se localiza en cada una de las actividades que favorecen el logro de competencias; en este apartado el alumno, con la mediación del maestro, deberá determinar cuáles son las competencias genéricas y las competencias disciplinares que está desarrollando y escribir en el cuadro las que sean pertinentes.

Autoevaluación

Es una colección de ejercicios que ayudan a reforzar el trabajo desarrollado a lo largo de la unidad.

Competencias genéricas

Categorías	Competencias
Se autodetermina y cuida de sí	1. Se conoce y valora a sí mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue. 2. Es sensible al arte y participa en la apreciación e interpretación de sus expresiones en distintos géneros. 3. Elige y practica estilos de vida saludables.
Se expresa y se comunica	4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
Piensa crítica y reflexivamente	5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos. 6. Sustenta una postura personal sobre temas de interés y relevancia general, considerando otros puntos de vista de manera crítica y reflexiva.
Aprende de forma autónoma	7. Aprende por iniciativa e interés propio a lo largo de la vida.
Trabaja en forma colaborativa	8. Participa y colabora de manera efectiva en diversos equipos.
Participa con responsabilidad en la sociedad	9. Participa con una conciencia cívica y ética en la vida de su comunidad, región, México y el mundo. 10. Mantiene una actitud respetuosa hacia la interculturalidad y la diversidad de creencias, valores, ideas y prácticas sociales. 11. Contribuye al desarrollo sustentable de manera crítica con acciones responsables.

Unidad 1

Introducción a la geometría euclidiana

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Cuáles son las tres proposiciones que integran un silogismo?

2. Es el razonamiento cuya característica es que va de lo general a lo particular.

3. ¿Cuáles son los llamados conceptos fundamentales de la geometría euclidiana?

4. ¿Cómo se clasifican las proposiciones matemáticas?

5. La hipótesis y la tesis son elementos que se encuentran en el enunciado de un:

Introducción a la geometría euclidiana

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca los antecedentes históricos de la geometría, así como, los conceptos básicos de la geometría euclidiana.
- Plantee conjeturas a través del razonamiento inductivo.
- Identifique axiomas y postulados.
- Identifique y reconozca teoremas, corolarios y lemas que le permitirán desarrollar el pensamiento crítico para analizar diversas situaciones
- Comprenda que la geometría está presente en diversas situaciones de su vida cotidiana.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación.
8. Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Introducción a la geometría euclidiana.
- Antecedentes históricos de la geometría.
- Las relaciones y los silogismos.
- Finalidad de los procesos inductivo y deductivo.
- Conceptos básicos de la geometría euclidiana.
- Los axiomas y postulados de la geometría.
- Deducción de teoremas, corolarios y lemas.

Contenidos procedimentales

- Notará la diferencia entre axioma y postulado.
- Identificará los principales precursores de la geometría euclidiana.
- Resolverá y argumentará axiomas y postulados.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos básicos de la geometría.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Introducción a la geometría euclidiana

Definición de geometría

La geometría es la rama de las matemáticas que estudia las propiedades intrínsecas de las formas y de los cuerpos; para ello se vale del uso de *postulados*, *definiciones* y *axiomas*, mismos que permiten establecer *teoremas*.

División de la geometría

La geometría se divide, según sus objetos de estudio, en:

Geometría plana. Estudia las propiedades de las figuras que están en un plano, es decir, las de dos dimensiones.

Geometría del espacio o espacial. Estudia las propiedades de los cuerpos geométricos cuyos puntos no están todos en el mismo plano, es decir, las figuras de tres dimensiones: volumen y superficie de sólidos geométricos.

Existen otras geometrías especializadas en diferentes campos de las matemáticas, por ejemplo:

Geometría analítica. Estudia las propiedades de las figuras geométricas y resuelve los problemas que éstas presentan mediante sistemas de coordenadas y métodos algebraicos que se representan como grupos numéricos. Asimismo, las figuras están modeladas por ecuaciones.

Geometría descriptiva. Estudia las características de los cuerpos en el espacio por medio de sus proyecciones sobre determinados planos.

Destacan también las geometrías de proyección, finita, no euclidianas, etcétera.

EJERCICIO 1

I. Contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. ¿Qué estudia la geometría?
2. ¿En cuántas partes se divide la geometría y qué estudia cada una de ellas?
3. Cita otras geometrías especializadas en diferentes campos de las matemáticas.
4. ¿Qué estudia la geometría analítica?
5. Investiga las bases fundamentales de la geometría no euclidiana.
6. Investiga la definición de *geometría finita* y la de *proyección*.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Antecedentes históricos de la geometría

Para que la geometría adquiriera la estructura propia de una práctica científica tuvieron que pasar muchos siglos, hasta que la cultura griega ordenara los conocimientos empíricos adquiridos por el hombre desde tiempos muy remotos, reemplazando la observación y experimentación por deducciones racionales o lógicas.

A continuación recorreremos brevemente los hechos que, en el transcurso de muchos siglos, se acumularon hasta propiciar el nacimiento de la geometría.

Sumerios y babilonios

La rueda, inventada por los sumerios 3500 años a. C., marca en la historia el inicio de la civilización; además, su escritura, la aritmética que emplearon y las construcciones de sus ciudades revelan cierta comprensión de las figuras geométricas.

En la antigua Mesopotamia florece la cultura de los babilonios, herederos de los sumerios; ellos adaptaron la rueda a sus carros de guerra, descubrieron las propiedades de la circunferencia y dedujeron el valor de 3 como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo.

De acuerdo con sus estudios astronómicos, calcularon que el año tiene aproximadamente 360 días, motivo por el cual dividieron la circunferencia en 360 partes iguales y obtuvieron así el grado sexagesimal. También tenían el conocimiento de cómo trazar un hexágono regular inscrito en el círculo; conocían una fórmula para hallar el área del trapecio rectángulo.

Egipcios

Los egipcios, obligados por las constantes crecidas del Río Nilo que año con año inundaba sus tierras de cultivo, tuvieron que rehacer la división de terrenos para calcular los impuestos que cada dueño tenía que pagar de acuerdo a la superficie cultivada; la aplicación de sus conocimientos geométricos se efectuó sobre la medida de la tierra, de lo cual se deduce el significado de *geometría* (medida de la tierra) cuyas raíces griegas son *gê* (tierra) y *metrón* (medida).

También aplicaron sus conocimientos de geometría en la construcción de pirámides como la de Keops, Kefren y Mekerinos, que son cuadrangulares en sus bases, y sus caras laterales son triángulos equiláteros.

Los conocimientos geométricos de los egipcios están contenidos en cinco papiros; el de mayor interés es el de Rhind, en el que se establecen las reglas para calcular las áreas del triángulo isósceles, del trapecio isósceles y del círculo; también determinaron el valor de 3.1604 como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, valor mucho más aproximado que el de los babilonios para π.

Los egipcios empleaban el cordel (tendedores de cuerda) para sus operaciones de construcción y diseño; este instrumento fue empleado como regla, compás y escuadra.

Griegos

Los conocimientos egipcios sobre la geometría eran netamente empíricos, ya que no se cimentaban en una sistematización lógica deducida a partir de axiomas y postulados.

En Grecia comenzó la geometría como ciencia deductiva, con las aportaciones de matemáticos como Tales de Mileto, Herodoto, Pitágoras de Samos y Euclides de Alejandría, quienes fueron a Egipto a iniciarse en los conocimientos de la geometría.

Tales de Mileto

(Siglo VII a. C.) Fue uno de los siete sabios y fundador de la escuela Jónica. Hizo aportaciones a la filosofía y a las ciencias, especialmente en la geometría.

Resolvió algunos problemas, como el cálculo de la altura de las pirámides conociendo la sombra que proyectan; la igualdad de los ángulos de la base en el triángulo isósceles; el valor del ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto; demostró algunos teoremas asociados con la proporcionalidad de segmentos determinados en dos rectas cortadas por un sistema de paralelos.

Teorema de Tales de Mileto

1. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.
2. Todo diámetro biseca a la circunferencia.
3. Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son iguales.

Pitágoras de Samos

(Siglo VI a. C.) Fue discípulo de Tales de Mileto. Fundó en Crotona, Italia, la escuela pitagórica. Se le atribuye el teorema que lleva su nombre, y que enuncia: "El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos".

Otro de sus teoremas expresa que *la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos*.

También demostró la construcción del pentágono y poliedros regulares, como: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Euclides de Alejandría

(Siglo IV a. C.) Fue uno de los más distinguidos maestros de la universidad de Alejandría. Por encargo de Ptolomeo, rey de Egipto, reunió y ordenó los teoremas y demás proposiciones geométricas en su obra llamada *Elementos*, que ha sobrevivido hasta el presente, por lo que se le considera el padre de la geometría. A continuación se describen los temas abordados en cada uno de los 13 libros:

Libro I. Relación de igualdad de triángulos; teoremas sobre paralelas; suma de las áreas de triángulos de un polígono; igualdad de las áreas de triángulos o paralelogramos de igual base y altura; teorema de Pitágoras.

Libro II. Conjunto de relaciones de igualdad entre áreas de rectángulos que conducen a la resolución geométrica de la ecuación de segundo grado.

Libro III. Circunferencia; ángulo inscrito.

Libro IV. Construcción de polígonos regulares inscritos o circunscritos a una circunferencia.

Libro V. Teorema general de la medida de magnitudes bajo forma geométrica; números irracionales.

Libro VI. Proporciones; triángulos semejantes.

Libros VII, VIII y IX. Aritmética: proporciones, máximo común divisor y números primos.

Libro X. Números inconmensurables (que no se pueden comparar) bajo forma geométrica a partir de los radicales cuadráticos.

Libros XI y XII. Geometría del espacio y, en particular, relación entre volúmenes de prismas y pirámides, cilindro y proporcionalidad del volumen de una esfera al cubo del diámetro.

Libro XIII. Construcción de los cinco poliedros regulares.

Platón

(Siglo IV a. C.) En la primera mitad de este siglo, se inició en Atenas un movimiento científico a través de la Academia de Platón; su filosofía establece que la matemática no tiene una finalidad práctica, sino simplemente se cultiva con el único fin de conocer; por esta razón se opuso a las aplicaciones de la geometría. Dividió la geometría en *elemental* y *superior*. La elemental comprende todos los problemas que se pueden resolver con regla y compás; la superior estudia los tres problemas más famosos de la geometría antigua, no solubles con regla y compás.

Los tres problemas más famosos de la geometría antigua

1. La cuadratura del círculo. Se trata de construir, utilizando solamente la regla y el compás, el lado de un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado.
2. La trisección del ángulo. El problema de dividir un ángulo en tres partes iguales utilizando como apoyo solamente la regla y el compás; sólo es posible resolverlo para casos particulares, como la división del ángulo de 90°.
3. La duplicación del cubo. Consiste en hallar, mediante una construcción geométrica, un cubo que tenga un volumen doble del de un cubo dado.

No se trata de problemas que en la actualidad no se hayan resuelto prácticamente, sino de problemas que tienen una importancia totalmente teórica.

Arquímedes de Siracusa

(287-212 a. C.) Estudió en Alejandría y sin duda fue una de las máximas figuras de las matemáticas griegas. Después de grandes disputas con Euclides, se retiró a Siracusa, donde cultivó todos los campos de las matemáticas (geometría y aritmética principalmente), la astronomía y la física.

Calculó un valor más aproximado del área de la elipse, el volumen del cono y de la esfera; estudió la llamada *espiral de Arquímedes*, que se aplicó para la solución de la trisección del ángulo.

Apolonio de Perga

(260-200 a. C.) Estudió ampliamente las secciones cónicas que 18 siglos después sirvieron a Kepler en sus investigaciones de astronomía, y logró determinar casi todas sus propiedades.

En su obra se encuentran también las ideas que coadyuvaron a René Descartes a crear la geometría analítica, 20 siglos después.

Herón de Alejandría

(Siglo II d. C.) Su obra destaca la demostración de la fórmula que lleva su nombre, y que se emplea para calcular el área de un triángulo en función de sus lados.

EJERCICIO 2

I. Subraya la respuesta correcta.

1. Cultura que ordenó en un sistema los conocimientos empíricos de la geometría.
   Egipcia Griega Babilonia Romana
2. Cultura que, basada en sus estudios astronómicos, dividió la circunferencia en 360 partes iguales, y obtuvieron así el grado sexagesimal.
   Sumeria Griega Babilonia Egipcia
3. Cultura cuyos conocimientos geométricos fueron aplicados a la división de extensiones territoriales.
   Egipcia Romana Sumeria Fenicia
4. Matemático que calculó la altura de una pirámide por medio de la sombra que proyecta.
   Pitágoras Euclides Arquímedes Tales de Mileto
5. Matemático que estableció el teorema: "La suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos".
   Euclides Herón Pitágoras Platón
6. En su obra titulada *Elementos* sistematizó el conocimiento empírico acerca de la geometría.
   Tales de Mileto Euclides Pitágoras Arquímedes
7. Filósofo que dividió la geometría en elemental y superior.
   Platón Apolonio Herón Arquímedes
8. Matemático griego que calculó un valor más aproximado de π, el área de la elipse, el volumen del cono y de la esfera.
   Euclides Platón Arquímedes Herón
9. Su obra sirvió como fundamento para que Descartes desarrollara la geometría analítica 20 siglos después.
   Apolonio Euclides Pitágoras Arquímedes
10. En su obra destaca la fórmula para calcular el área de un triángulo en función de sus lados.
    Apolonio Herón Arquímedes Platón

II. Contesta las siguientes preguntas.

1. Herramienta empleada por los egipcios como regla, compás y escuadra.

   _____

2. Nombre de los matemáticos griegos que otorgaron a la geometría el carácter de ciencia deductiva.

   _____

3. Cita los tres teoremas fundamentales de Tales de Mileto.

   _____

   _____

   _____

4. Escribe el enunciado del teorema más importante de Pitágoras de Samos.

5. ¿Cuáles son los tres problemas más famosos de la geometría antigua?

6. ¿De cuántos libros consta la obra llamada *Elementos*?

7. ¿Qué principio filosófico estableció Platón en oposición a la aplicación de la geometría?

8. Describe los contenidos de los libros de la obra llamada *Elementos*.

9. ¿Qué conocimientos geométricos están contenidos en el papiro de Rhind?

10. ¿Qué razones permitieron a los griegos dar la estructura de ciencia a la geometría?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Las relaciones y los silogismos

Relaciones

La mayoría de los hechos geométricos se determinan por medición directa; las reglas y principios se hacen evidentes después de obtener unas cuantas medidas, pero a veces resulta imposible efectuar todas las mediciones para llegar a decir que las reglas existen. La matemática se vale de técnicas para demostrar si existen o no dichas reglas; por ejemplo, emplea el análisis y la lógica como herramientas para el estudio de la geometría.

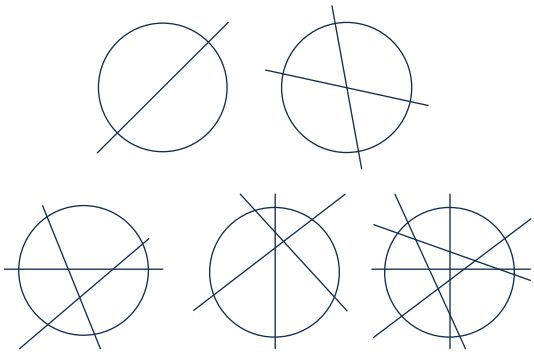
En los sistemas matemáticos deseamos maximizar el número de enunciados demostrados suponiendo tan poco como sea posible, ya que la mayoría de las veces lo obvio es lo más difícil y complicado de demostrar; comprobado lo anterior, garantizamos que las relaciones son válidas.

Por ejemplo, supongamos que se tiene una llanta de auto con un diámetro de 28 pulgadas de longitud; midiendo la longitud alrededor de la llanta, es decir, la circunferencia, se encontró aproximadamente 88 pulgadas. Si esto se realiza con una llanta de 35 pulgadas de diámetro, su circunferencia mide casi 110 pulgadas. En los dos casos, la razón de la circunferencia a la longitud de un diámetro es 3.1416, aproximadamente. La relación de la circunferencia de un círculo a la longitud de un diámetro, ¿es siempre igual? Resulta imposible medir todos los círculos y calcular esta relación; sin embargo, por razonamientos matemáticos la relación es válida para cualquier círculo.

Ejemplo

Una región circular se divide en dos partes si se corta por una recta; dos cortes rectos dividen el círculo en cuatro partes como máximo; tres cortes rectos dividen el círculo en un máximo de siete partes. ¿Podemos encontrar la existencia de una relación entre el número de cortes y el número máximo de divisiones que se pueden obtener?

Número de cortes	Número de divisiones
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	?
7	?
⋮	⋮
n	?



Silogismos

Un *silogismo* es un tipo de argumento que consta de tres proposiciones que son: la mayor, la menor y la conclusión, deducida a partir de la relación lógica que guardan las dos primeras.

Ejemplo

a) Todos los residentes de la ciudad de Reynosa son ciudadanos del estado de Tamaulipas. (Premisa mayor o enunciado general).

b) Todos los ciudadanos de Tamaulipas pagan un impuesto estatal sobre la renta. (Premisa menor o secundaria).

c) Por tanto, todos los residentes de Reynosa pagan un impuesto estatal sobre la renta. (Conclusión o enunciado específico).

Analizando el lenguaje matemático entre las **relaciones** y los **silogismos** decimos que las **relaciones** se fundamentan en el razonamiento matemático de la lógica inductiva, mediante observaciones limitadas por analogía o por tanteo. Por otro lado, los **silogismos** se basan en las premisas o hipótesis que se aceptan como parte del análisis matemático de la lógica deductiva, en la que el razonamiento parte de un enunciado general para deducir otro específico.

EJERCICIO 3

I. Resuelve lo siguiente.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

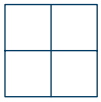
Competencias disciplinares

1. ¿Se puede predecir el número máximo de rectas correspondientes a cualquier número dado de puntos? ¿Existe alguna regla?

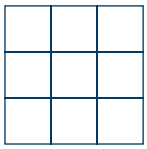
2. En la figura *a* se muestra un cuadrado. ¿Cuántos cuadrados diferentes se ven en la figura *b*? Quizá la primera respuesta es 4; sin embargo, si se incluye el cuadrado grande, hay 5 cuadrados. ¿Cuántos cuadrados hay en *c*? ¿Existe una regla definida?

a)

b)



c)



Argumenta tu respuesta

3. En la siguiente figura se cuestiona si *M* es prolongación de *N*. ¿Por qué?

II. En equipo, resuelvan lo siguiente y en plenaria discutan los resultados.

1. Desarrolla tres argumentos silogistas.

Premisa mayor:

Premisa menor:

Conclusión:

Premisa mayor:

Premisa menor:

Conclusión:

Premisa mayor:

Premisa menor:

Conclusión:

2. ¿Cuál es la diferencia entre las relaciones y los silogismos?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Finalidad de los procesos inductivo y deductivo

Razonamiento inductivo

El razonamiento inductivo, en su formulación más simple, parte de casos particulares —productos de la observación— y a partir de ellos formula una proposición de carácter general. Veamos el siguiente ejemplo.

Caso 1. El cuervo *x* observado es de color negro.
Caso 2. El cuervo *y* observado es de color negro.
⋮
Caso *n*. El cuervo *n* observado es de color negro.

Proposición general: Todos los cuervos son negros.

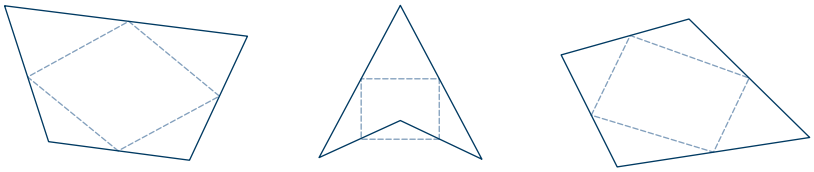
No obstante, la experiencia nos indica que nuestros sentidos, principalmente la vista y el tacto, no siempre resultan confiables para obtener información cierta.

La importancia del estudio de la geometría radica en que, valiéndose de recursos como los sentidos, los instrumentos de medición, los dibujos y las gráficas, así como la inteligencia del razonamiento y las demostraciones lógicas, tal sesgo en la información sensorial puede solucionarse.

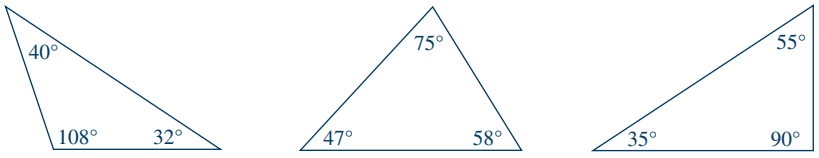
El método inductivo se utiliza principalmente en el campo de la biología, fisica y química, que son ciencias experimentales y, por lo tanto, se basan en reglas y leyes generales obtenidas de las observaciones particulares concluyendo en situaciones generales (también se le llama *método sintético*).

Ejemplos

1. Si observamos las siguientes figuras, **inducimos** que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero determinan un paralelogramo.

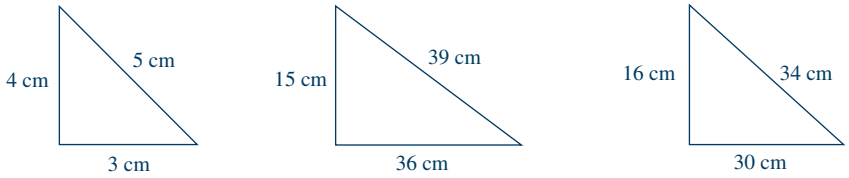


2. Suma los ángulos interiores de los siguientes triángulos.



El conocimiento de los casos particulares anteriores nos **induce** a aceptar que los ángulos interiores de todo triángulo suman 180°.

3. Compara la suma de los cuadrados de los catetos con el cuadrado de la hipotenusa.



Aceptamos por **inducción** que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (teorema de Pitágoras).

Para la estructuración y aplicación de las matemáticas no podemos atenernos sólo a procedimientos directos y razonamientos inductivos para demostrar leyes generales y fórmulas, por lo que este método no es el más indicado para resolver problemas y hacer demostraciones.

Razonamiento deductivo

Es el más usado en las ciencias formales, principalmente en la geometría y en lógica. Consta en construir progresiones de conocimientos que se suponen verdaderos, de manera tal que se obtienen nuevos conocimientos. En otros términos, al proceder deductivamente seleccionamos una proposición que aceptamos como verdadera (pueden ser axiomas o definiciones); luego, mediante el empleo de reglas de transformación, obtenemos información que, aunque estaba contenida originalmente en la proposición, no era evidente. De este modo, el razonamiento deductivo asegura que la información obtenida (teoremas, corolarios y otras proposiciones) es también verdadera.

También se le llama *método analítico* o *indirecto*, cuya característica es que va de lo general a lo particular.

Ejemplo

Si admitimos que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, se **deduce** que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°.

La integración del razonamiento inductivo y el deductivo dan lugar al método científico que nos lleva a la comprobación y demostración de leyes, principios o reglas formuladas por inducción.

EJERCICIO 4

I. En grupo, con asesoría de su profesor resuelvan lo siguiente. Escribe una "I" si el razonamiento aplicado fue inductivo o una "D" si fue deductivo en la demostración de las siguientes proposiciones.

_____ Sumando los ángulos interiores de varios triángulos se concluyó que siempre suman 180°.

_____ Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

_____ Midiendo los catetos (opuesto y adyacente) y la hipotenusa de varios triángulos rectángulos se encontró la relación $(\text{HIP})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2$.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

_____ Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen congruentes sus hipotenusas y uno de sus ángulos agudos.

_____ La bisectriz de un ángulo es su eje de simetría.

_____ Si dos rectas se cortan entre sí, los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

_____ En todo paralelogramo los ángulos interiores contiguos son suplementarios.

_____ Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.

_____ Dos segmentos de recta son congruentes si coinciden sus extremos.

_____ Un ángulo interior de un triángulo y su extremo adyacente son suplementarios.

II. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿En qué se basa el razonamiento inductivo?

_____

_____

2. Bajo tus propias palabras, ¿en qué consiste el método deductivo?

_____

_____

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Conceptos básicos de la geometría euclidiana

Conceptos no definidos

Son llamados **conceptos fundamentales** y corresponden a términos tales como *punto*, *línea*, *superficie* y *volumen*. Puesto que son fácilmente comprensibles no se definen.

A diferencia de la geometría euclidiana, la geometría moderna evita la conceptualización de aspectos primarios o conceptos fundamentales. Así por ejemplo, las definiciones de Euclides dictan que: **punto es lo que no tiene partes**, únicamente indica posición y carece de dimensiones; **línea o recta es una longitud sin anchura**, carece de límites, desconociéndose su primer y último elementos.

Cuerpo físico y cuerpo geométrico

Son cuerpos físicos las cosas que nos rodean, como cuadernos, sillas, bolígrafos, escuadras, navajas, etc. Tienen forma, color, peso, dureza y ocupan un lugar en el espacio físico. De estos cuerpos la geometría considera solamente su forma y dimensiones, con lo que modela cuerpos geométricos o sólidos a partir de ellos, por ejemplo los conos, las esferas, los prismas, los cilindros, etcétera.

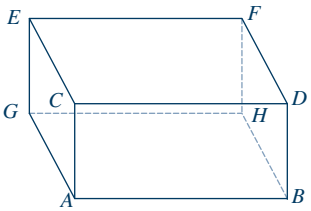
Los sólidos tienen tres dimensiones, que son: **largo**, **ancho** y **alto**.

Superficie

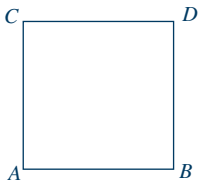
Es el área delimitada por la longitud del largo y ancho de una figura. La superficie posibilita la distinción entre una figura geométrica y otra, así como la diferencia del espacio existente alrededor de ella.

Ejemplos de superficies son la sombra que proyecta un árbol, un poste, así como la cara de un cuerpo geométrico (representaciones gráficas).

Ejemplos



Los sólidos tienen tres dimensiones: largo, ancho y alto.



Las superficies tienen dos dimensiones: largo y ancho.

Una línea recta tiene una sola dimensión: longitud.

EJERCICIO 5

I. Contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Ofrece cinco ejemplos de cosas pequeñas que puedan considerarse como puntos.
2. ¿Como definió Euclides el *punto*?
3. ¿Cuántos puntos son suficientes para determinar una recta?
4. ¿Cuántas rectas pueden pasar por un mismo punto?
5. Escribe cinco ejemplos de cuerpos físicos.
6. ¿Qué características tienen los cuerpos físicos?
7. ¿Qué es un cuerpo geométrico?
8. Escribe las características geométricas de los cuerpos sólidos o geométricos.
9. ¿Cómo se define la superficie geométrica?
10. Da tres ejemplos de superficie.
11. ¿Cuál es la dimensión que tiene una línea?
12. Escribe las dos dimensiones características de una superficie.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Los axiomas y postulados de la geometría

Proposiciones matemáticas

El enunciado de una verdad demostrada o que no requiere demostración se denomina **proposición**.

Las proposiciones matemáticas no siempre son consecuencia de otras; algunas se aceptan como verdaderas por sí mismas y sirven como fundamento a la geometría euclidiana.

Las proposiciones se clasifican en: axiomas, postulados, definiciones, teoremas y corolarios.

Axioma

En geometría euclidiana, es una proposición tan evidente y sencilla por sí misma que no requiere demostración. En geometrías modernas, los axiomas son proposiciones que se *asumen* como verdaderas, es decir, funcionan como *hipótesis de trabajo* para averiguar qué conclusiones o información nueva puede ser extraída a partir de ellas.

No obstante, por ahora nos limitaremos al estudio de los axiomas euclidianos.

Ejemplos

1. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
2. El todo es igual a la suma de sus partes. Es decir, si el todo es 10 y sus partes son: 2, 3 y 5, la suma será: $2 + 3 + 5 = 10$
3. Si a cantidades iguales se agregan o quitan cantidades iguales, los resultados son iguales.

$$\text{Si} \quad A = B \quad \text{y} \quad C = D \qquad \therefore \quad A + C = B + D \quad \text{o} \quad A - C = B - D$$

4. Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales.

$$\text{Si } A = B \quad \text{y} \quad C = D \quad \therefore \quad A \cdot C = B \cdot D \quad \text{o} \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

5. Los miembros de una desigualdad pueden permutar sus lugares cambiando el sentido de la desigualdad.

$$A > B \qquad \therefore \quad B < A$$

Postulado

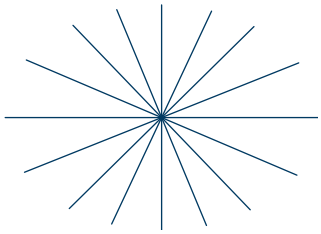
Es una proposición cuya verdad se admite sin demostración, aunque no tiene la evidencia del axioma. Para Euclides fueron la piedra de toque de su sistema deductivo, pues sirven como las proposiciones más elementales a partir de las cuales pueden obtenerse teoremas y corolarios.

Ejemplos

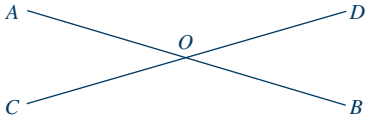
1. Por dos puntos dados puede hacerse pasar una recta y sólo una.

2. La recta es la distancia más corta entre dos puntos.

3. Por un punto puede pasar un número infinito de rectas.



4. Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.



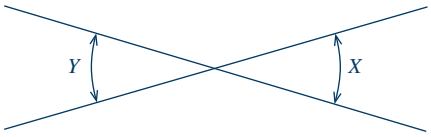
5. Todo segmento de rectas puede prolongarse indefinidamente en ambos sentidos.

Definición

Es una proposición que implica casi siempre una descripción clara y precisa de las características de un objeto geométrico.

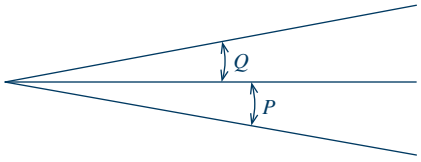
Ejemplos

1. Ángulos opuestos por el vértice son aquellos en que los lados de uno son prolongaciones de los lados del otro.



$\sphericalangle X$ opuestos por el vértice al $\sphericalangle Y$

2. Ángulos adyacentes son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común, situado entre ellos.

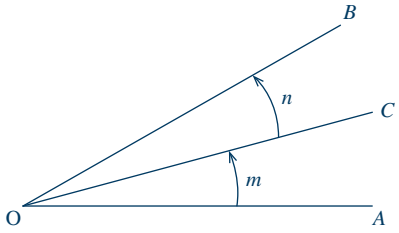


$\sphericalangle P$ adyacente al $\sphericalangle Q$

3. Paralelogramo es el cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos.

$\overline{AB} \| \overline{CD}$ y $\overline{AC} \| \overline{BD}$

4. Bisectriz de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos ángulos iguales.



El $\overline{OC}$ es la bisectriz

$\therefore \quad \measuredangle m = \measuredangle n$

EJERCICIO 6

1. Dadas las siguientes proposiciones, escribe una "A" si es un axioma o una "P" si es un postulado.

_____ La suma de sus partes es igual al todo.

_____ Hay infinitos puntos.

_____ Triángulo es un polígono de tres lados.

_____ Dos cantidades iguales a otra son iguales entre ellas.

_____ La distancia más corta entre dos puntos es la recta.

_____ Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.

_____ El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

_____ El cuadrado tiene cuatro lados.

_____ La recta se puede prolongar infinitamente en ambos sentidos.

_____ Los miembros de una desigualdad pueden permutar cambiando el sentido de la desigualdad.

II. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué proposiciones son la base de la geometría?
2. ¿A qué se le llama proposición?
3. ¿Cómo se define un axioma?
4. ¿Qué se entiende por postulado?
5. Explica el concepto de definición.
6. Escribe tres ejemplos de axioma, postulado y definición.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Deducción de teoremas, corolarios y lemas

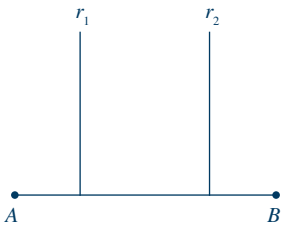
Teorema

Es una proposición que exige demostración. La demostración consta de un conjunto de razonamientos lógicos que conducen a la evidencia de la proposición a partir de hechos dados o hipótesis incluidos en el enunciado.

En el enunciado de todo teorema se distinguen dos elementos, que son la **hipótesis**, que es lo que se supone, y la **tesis**, que es lo que se quiere demostrar.

Ejemplos

1. Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.



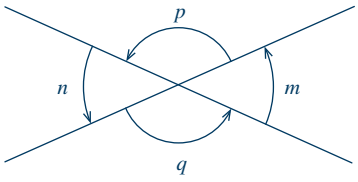
Hipótesis

Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.

Tesis

Si $r_1 \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $r_2 \perp \overleftrightarrow{AB}$ $\therefore$ $r_1 \| r_2$

2. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.



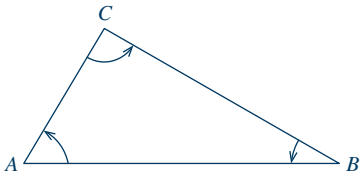
Hipótesis

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Tesis

Si $\measuredangle m + \measuredangle p = 180°$ y $\measuredangle n + \measuredangle q = 180°$ $\therefore$ $\measuredangle m = \measuredangle n$, $\measuredangle p = \measuredangle q$

3. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°).



Hipótesis

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°).

Tesis

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

Corolario

Es una proposición que es consecuencia inmediata de un teorema y cuya demostración requiere un ligero razonamiento, aunque en ocasiones, ninguno.

Ejemplos

1. La proposición "Dos puntos determinan una recta", es corolario del postulado "Por dos puntos dados puede hacerse pasar una recta y sólo una".
2. La proposición "Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°" es corolario del teorema "La suma de los águlos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°)".
3. La proposición "Todos los ángulos rectos son iguales" es corolario del postulado "Todos los ángulos de lados colineales son iguales".

Lema

Es una proposición que hay que demostrar antes de establecer el teorema, es decir, es como un teorema preliminar a otro que se considera más importante.

Ejemplo

"Un prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes" es el lema previo de la demostración del volumen de una pirámide.

Teorema recíproco

El recíproco de un teorema es otro en el que la hipótesis se convierte en tesis y la tesis en hipótesis.

Ejemplos

1. Teorema directo. "La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°)".

   Teorema recíproco. "Si la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a dos rectos (180°), el polígono se denomina triángulo".

   Hipótesis del teorema recíproco. "Polígono cuyos ángulos interiores sumen dos rectos (180°).

   Tesis del teorema recíproco. "El polígono es un triángulo".

   No siempre un teorema recíproco es verdadero; cuando lo es, la hipótesis y la tesis son equivalentes.

2. Teorema directo. "Si un número divide otros dos, también divide a su suma".

   Teorema recíproco. "Si un número divide la suma de dos números, también divide a otros".

   Explicación. Si el número 2 divide al 4 y al 6, y también divide la suma $\frac{4+6}{2}=\frac{10}{2}=5$; pero no es verdadero que por dividir a 10, divide a 3 y 7, cuya suma también es 10.

Es decir, el teorema recíproco no es cierto en general, aunque pueda serlo en algunos casos.

Demostración de teoremas

La demostración geométrica de un teorema, consiste en el razonamiento deductivo en el que a partir de ciertas proposiciones (hipótesis) se llega a probar una conclusión (tesis). En los distintos pasos de la demostración se encadenan conceptos conocidos y verdaderos, como definiciones, teoremas, axiomas, postulados y propiedades.

Los elementos o partes de la demostración son:

a) **La figura**. Es la ilustración gráfica de la proposición que se desea demostrar; debe contener los trazos fundamentales y los auxiliares.

b) **La hipótesis**. Es lo que sin discusión se acepta como verdadero y que sirve de punto de partida al razonamiento.

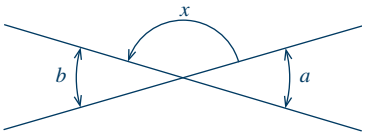
c) **La tesis**. Es lo que sostiene como verdadero.

d) **El razonamiento**. Es la serie de afirmaciones y razones que ligan a la hipótesis con la tesis, y permite deducir la tesis de la hipótesis.

e) **La conclusión**. Es la tesis, una vez que ya ha sido demostrada por medio del razonamiento.

Ejemplo

Teorema: Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.



Hipótesis	**Tesis**
Los ángulos a y b son opuestos por el vértice.	$\measuredangle a = \measuredangle b$

Razonamiento	**Conclusión**	**Fundamentos o reglas de inferencia**
1. $\measuredangle a + \measuredangle x = 180°$	$\measuredangle a = \measuredangle b$	Por ser adyacentes suplementarios.
2. $\measuredangle b + \measuredangle x = 180°$		Por la misma razón anterior.
3. $\therefore \quad \measuredangle a + \measuredangle x = \measuredangle b + \measuredangle x$		Si los segundos miembros de dos igualdades son iguales, los primeros miembros también lo son.
4. $\therefore \quad \measuredangle a = \measuredangle b$		Si a cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados son iguales.

EJERCICIO 7

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es un teorema?
2. ¿Qué elementos se distinguen en el enunciado de un teorema?
3. Escribe cinco teoremas.
4. ¿Qué es un corolario?
5. Escribe cinco ejemplos de corolario.
6. ¿Qué es un lema?
7. Escribe ejemplos de lema.
8. ¿A qué se le llama teorema recíproco?
9. Explica un ejemplo de teorema recíproco.
10. ¿Cuáles son los elementos requeridos en la demostración de un teorema?

II. Escribe en el paréntesis de la izquierda el número que corresponde a la respuesta correcta.

( ) "Las diagonales de un rectángulo se cortan en su punto medio" es un:

( ) "Dos puntos determinan una recta" es un:

( ) Proporción que se demuestra antes de establecer el teorema.

( ) Teorema en que la hipótesis se convierte en tesis y la tesis en hipótesis.

( ) Ilustración gráfica de la proposición que se desea demostrar.

( ) Serie de afirmaciones y razones que ligan a la hipótesis con la tesis.

( ) Es lo que se sostiene como cierto o verdadero al demostrar un teorema.

( ) Sirve de punto de partida al razonamiento.

( ) Resultado de la demostración de un teorema por medio del razonamiento.

( ) Conjunto de razonamientos deductivos en el que a partir de ciertas proposiciones se llega a probar una conclusión.

1. La conclusión
2. La figura
3. Demostración de teoremas
4. Corolario
5. Hipótesis
6. Axioma
7. Lema
8. La tesis
9. Teorema
10. Teorema recíproco
11. El razonamiento

III. En equipo de dos personas, demuestren los siguientes teoremas.

1. En todo triángulo los ángulos interiores suman 180°.
2. Dos ángulos adyacentes son suplementarios.
3. En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.
4. Cuando dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales.
5. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es de cuatro rectos.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

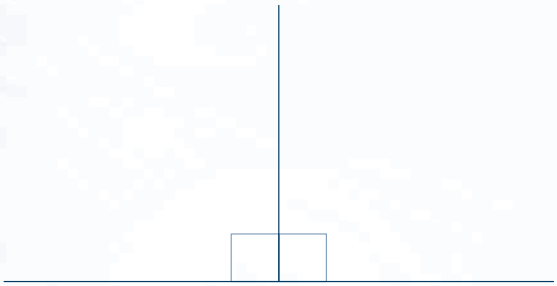
1. Escribe un argumento silogista e indica cuál es cada una de sus proposiciones.

2. ¿Cuál es la diferencia entre razonamiento inductivo y deductivo?

3. Enuncia la diferencia entre un cuerpo físico y un cuerpo geométrico.

4. En la siguiente proposición, escribe si es axioma, postulado, corolario, lema o teorema.

   Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.



5. Demuestra el siguiente teorema.

   La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto, suman 360°.

UNIDAD 2

Rectas

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Cuántos y cuáles son los tipos de línea?

2. ¿Cuál es la diferencia entre razonamiento inductivo y deductivo?

3. ¿Qué posiciones puede ocupar una recta con relación al plano?

4. ¿Cuál es la diferencia entre dos rectas perpendiculares y dos rectas oblicuas?

5. ¿Cuáles son los caracteres de igualdad de los segmentos?

Rectas

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca algunos conjuntos de puntos.
- Interprete la posición relativa de dos rectas en el plano.
- Dé la definición de rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas.
- Distinga la notación de segmento, rayo y recta.
- Conozca cómo medir segmentos rectilíneos y congruencia de segmentos.
- Realice operaciones con segmentos.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Algunos conjuntos de puntos.
- Posición relativa de dos rectas en el plano.
- Rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas.
- Distinción y notación de segmento, rayo y recta.
- Medida de los segmentos rectilíneos.
- Congruencia de segmentos.
- Operaciones con segmentos.

Contenidos procedimentales

- Identificará conceptos básicos de la geometría como punto, línea y plano.
- Distinguirá entre segmento, rayo y recta.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos de segmentos rectilíneos.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Algunos conjuntos de puntos

Concepto de punto

Puesto que el punto es el concepto más fundamental de la geometría clásica, no es posible dar una definición de éste. Por el contrario, es a partir del concepto de punto que otras figuras pueden ser definidas, como es el caso de la línea. Por eso decimos que el punto es un primitivo de la geometría euclidiana.

No obstante, para fines didácticos podemos ofrecer una descripción intuitiva del punto. Por ejemplo, es razonable postular que el punto es la figura geométrica más elemental puesto que carece de dimensiones y, por tanto, de longitud, área y volumen. También es correcto sostener que el punto indica una posición en el espacio dentro de un sistema de coordenadas dado.

La representación de puntos geométricos se caracteriza por la huella que deja un lápiz bien afilado en el papel; su notación se efectúa por letras mayúsculas.

Ejemplos

Línea

La línea, también un concepto fundamental, se define como una sucesión continua de puntos en un mismo plano o dimensión. Es posible distinguir entre dos tipos de línea: la línea recta y la línea curva.

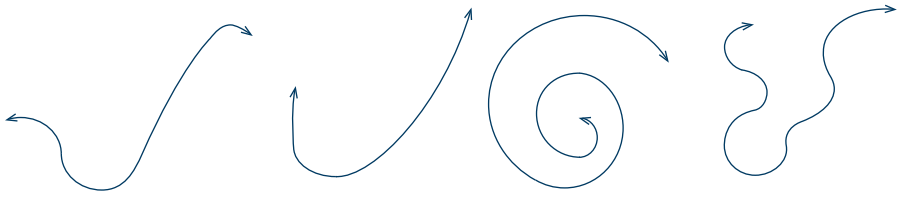
Línea recta. Es una sucesión infinita de puntos que se prolonga de manera indefinida en ambos sentidos, por lo que podemos decir que no comienza ni termina.

Propiedades de la recta

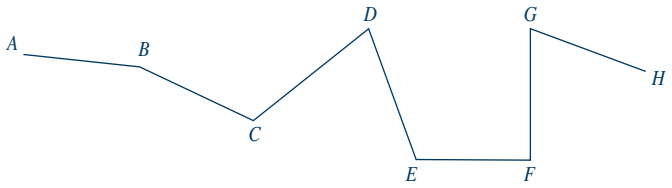
1. La distancia más corta entre dos puntos, es la recta.
2. Por dos puntos pasa una recta y solamente una.
3. Por un punto pueden pasar una infinidad de rectas.
4. Dos rectas no pueden tener más que un solo punto común.

Notación. La recta, por lo general, se representa con el símbolo $\leftrightarrow$ encima de las literales de los puntos $(\overleftrightarrow{AB})$; también se representa por rayas que se denotan con letras minúsculas.

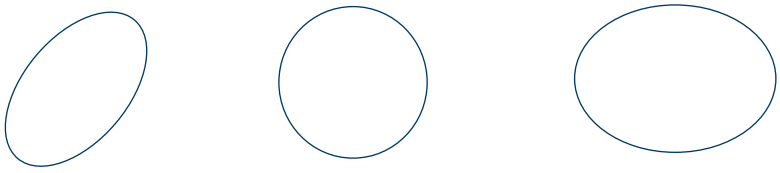
Línea curva. Es la que está generada por una continuidad de puntos que cambian de dirección frecuentemente; también se dice que es aquella que no tiene una sola parte recta.



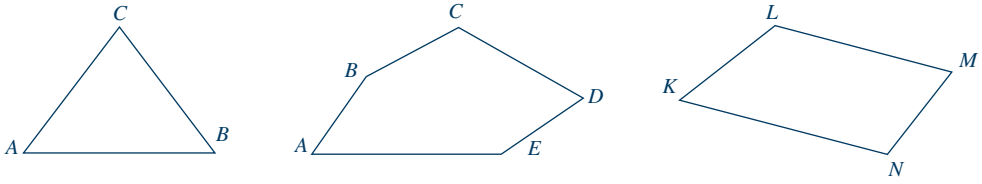
Línea quebrada o poligonal. Está compuesta de segmentos continuos que siguen diferentes direcciones.



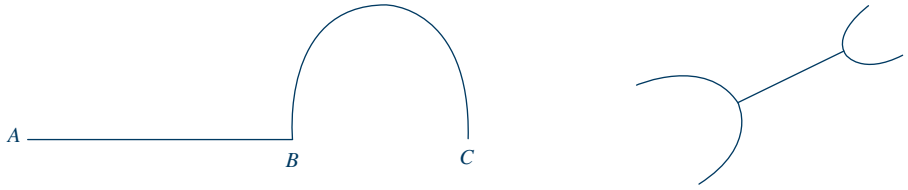
Curva simple cerrada. Es aquella que al trazarse, empieza y termina en el mismo punto. Ejemplos de ella son la elipse y circuferencia.



Poligonal simple cerrada. Es aquella que al trazarse con líneas quebradas empieza y termina en el mismo punto. Los polígonos regulares están formados por este tipo de línea.

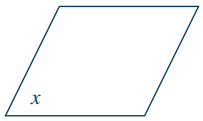


Línea mixta. Es aquella que está formada por una parte recta y otra parte curva.

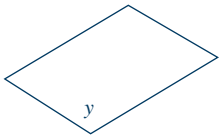


Plano. Una superficie como una pared, el piso, la cubierta de una mesa, los espejos, forman un plano. Junto con la recta y el punto, es uno de los elementos fundamentales de la geometría. Puede definirse como un objeto geométrico de dos dimensiones que contiene infinitos puntos y rectas. El plano no tiene límites para su extensión, aunque para representarlo se hace a través de un paralelogramo que muestre su posición; con frecuencia se emplean letras minúsculas para designar un plano.

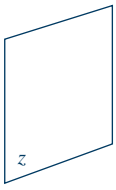
Ejemplos



Plano x



Plano y

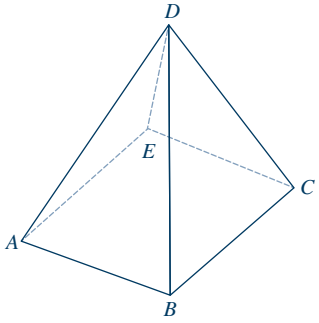


Plano z

Considerando los conceptos de punto, línea y plano, estos últimos nos permiten emplear una nomenclatura apropiada para su relación, por ejemplo: **un punto *P* permanece a una recta ℓ**; también, **ℓ pasa por *P***. Estas situaciones nos permiten formular las siguientes definiciones:

Puntos colineales. Son aquellos que están contenidos sobre una misma línea recta.

Puntos coplanares. Son aquellos que están ubicados sobre un mismo plano.

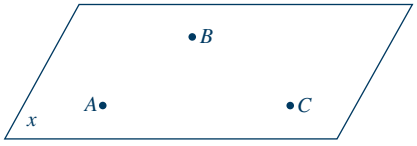


Son colineales A y B; también B y C, etcétera.

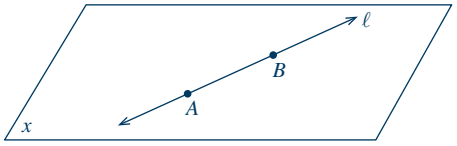
Son coplanares A, B y D; también B, C y D, etcétera.

Dos propiedades importantes de los planos son:

a) Por tres puntos no alineados pasa un plano y solamente uno.

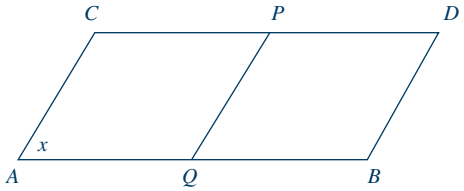


b) Dados dos puntos cualesquiera de un plano, la recta que los une está contenida en el plano.



La geometría plana, que estudia las figuras cuyas partes están todas en un mismo plano, se diferencia de la geometría del espacio, que estudia las propiedades de las figuras cuyas partes no están todas en un mismo plano.

Semiplano. Se define como cada parte resultante de trazar una recta que divide un plano.

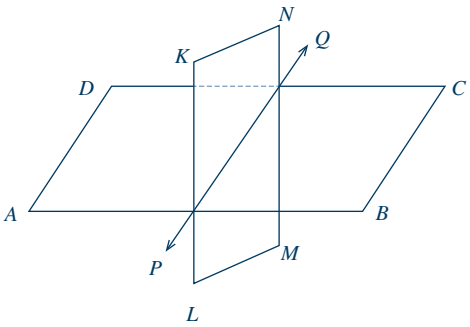


$\overleftrightarrow{PQ}$ **es una recta**; *AP* y *QD* **son semiplanos**.

Postulado de la división del plano. Todo plano divide el espacio en dos regiones situadas a una y otra parte del plano, de tal manera que no puede pasarse de una a otra sin atravesarlo.

Dos puntos de un mismo semiplano determinan un segmento que no corta a la recta que da origen a los dos semiplanos, y dos puntos de distinto semiplano determinan un segmento que corta a la recta.

Intersección de planos. Si dos planos tienen un punto común, tienen una recta en común; es decir, si dos planos se cortan, su intersección es una recta.



$\overleftrightarrow{PQ}$ es la recta de intersección de los dos planos *ABCD* y *KLMN*.

EJERCICIO 8

I. En equipo, respondan las siguientes preguntas y en plenaria socialicen sus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Cuál es tu concepto intuitivo de punto?
2. ¿Cómo se define la línea?
4. Define y cita ejemplos de línea recta.
5. Escribe tres propiedades características de la recta.
6. Define y cita ejemplos de línea curva.
7. ¿Qué es una línea quebrada o poligonal?
8. ¿Qué es una curva simple cerrada?
9. ¿A qué se le llama línea poligonal simple cerrada?
10. Define y cita ejemplos de línea mixta.
11. ¿Cómo se define el plano?

13. Explica las dos propiedades más importantes de los planos.
14. ¿Qué es un semiplano?
15. Describe la intersección de planos.

II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

1. ¿Cómo se representa gráficamente un punto y cuál es su notación?

2. Representa gráficamente una línea recta y escribe cuál es su notación.

3. En el espacio, representa gráficamente lo que se indica.

   a) Una línea curva.

   b) Una línea quebrada o poligonal.

   c) Una línea simple cerrada y poligonal simple cerrada.

   d) Una línea mixta.

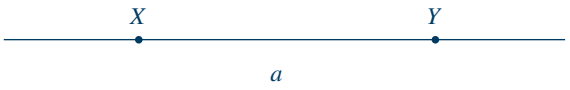
   e) Un plano en el eje *III*.

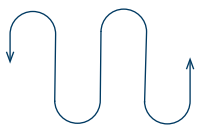
   f) Los puntos colineales y coplanares.

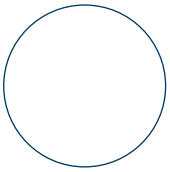
g) Un semiplano.

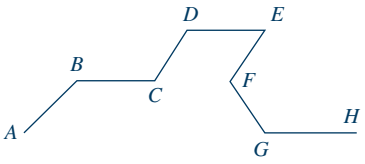
h) La intersección de dos planos.

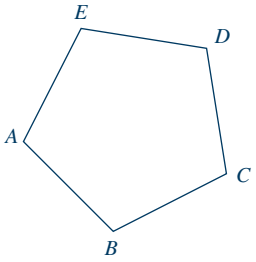
III. Identifica y anota el nombre de las siguientes figuras.

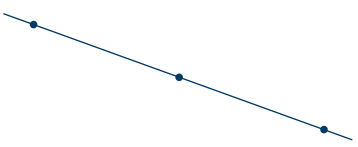


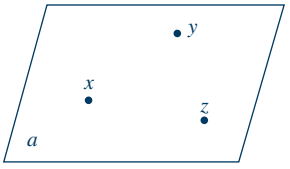












Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

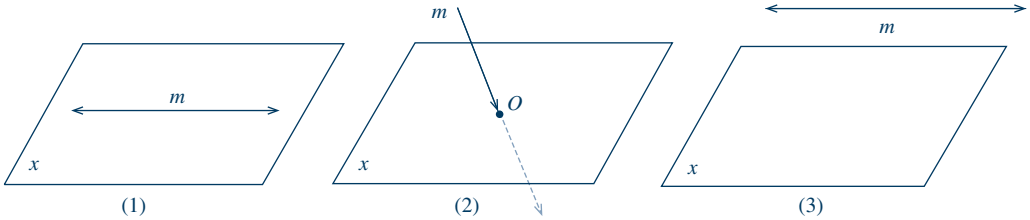
Posición relativa de dos rectas en el plano

Posición relativa de una recta y un plano

Una recta con relación a un plano puede ocupar alguna de las siguientes posiciones:

1. **La recta está contenida en el plano**; se dice que el plano pasa por la recta (la recta y el plano son coplanares).
2. **La recta corta (atraviesa) el plano al cual es secante**. En este caso la recta y el plano tienen un punto en común; si una recta es perpendicular a un plano, el plano es perpendicular a la recta; por lo tanto, son perpendiculares entre sí. *Recta oblicua* a un plano es toda recta que no es perpendicular ni paralela al plano; la intersección de una secante con un plano se denomina **pie de la secante**.
3. **La recta y el plano son paralelos** cuando no tienen ningún punto en común.

Representación gráfica de las posiciones relativas de una recta y un plano

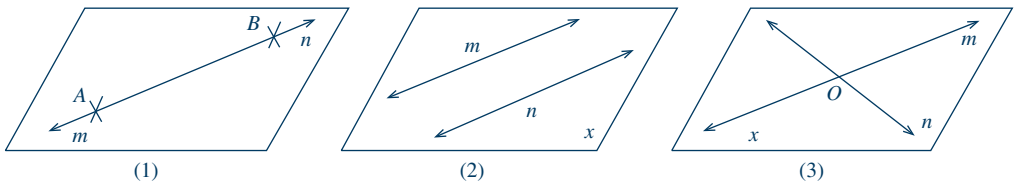


Posición relativa de dos rectas y un plano

Dos rectas con relación a un plano pueden ocupar las siguientes posiciones:

1. Dos rectas coplanares son **concurrentes** cuando tienen dos puntos comunes, es decir, si están en un mismo plano y se cortan.
2. Dos rectas coplanares son **paralelas** cuando están en un mismo plano y no tienen ningún punto en común, es decir, no se cortan.
3. Dos rectas coplanares son **secantes** cuando tienen un punto común en el cual se intersecan.

Representación gráfica de las posiciones relativas de dos rectas y un plano



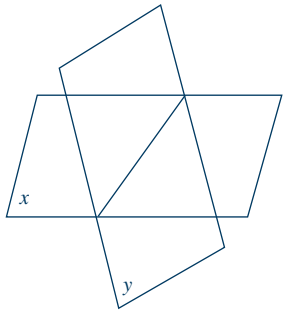
Posiciones relativas de dos planos

Dos planos en el espacio pueden ser secantes y paralelos.

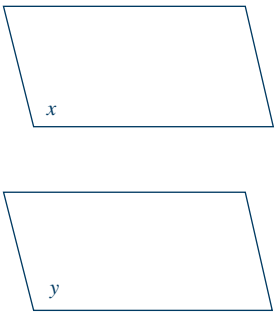
a) Son **secantes** cuando tienen una recta común.

b) Son **paralelas** cuando no tienen ningún punto en común.

a)



b)



EJERCICIO 9

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En equipo, respondan en su cuaderno las siguientes preguntas.

1. Explica las posiciones que una recta puede ocupar con relación a un plano.
2. Explica las posiciones que dos rectas pueden ocupar con relación a un plano.
3. Explica las posiciones de dos planos en el espacio.

II. Representa gráficamente y socializa tus respuestas.

1. Las posiciones relativas de una recta y un plano.

2. Las posiciones relativas de dos rectas y un plano.

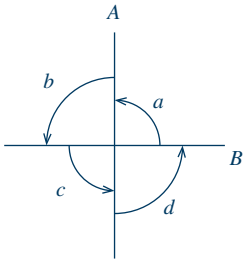
3. Las posiciones relativas de dos planos en el espacio.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Rectas perpendiculares, paralelas y oblicuas

Definición de rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales (ángulos adyacentes iguales).



$\sphericalangle a = \sphericalangle b = \sphericalangle c = \sphericalangle d = 90°$

$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle b$ son adyacentes

$\sphericalangle c$ y $\sphericalangle d$ son adyacentes $\quad \therefore \quad \overleftrightarrow{xx} \perp \overleftrightarrow{yy}$

$\sphericalangle a$ y $\sphericalangle d$ son adyacentes

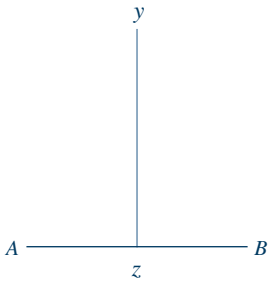
$\sphericalangle b$ y $\sphericalangle c$ son adyacentes

El símbolo de la perpendicular es $\perp$.

Carácter recíproco de la perpendicularidad

Si una recta es perpendicular a otra, ésta es perpendicular a la primera. Es decir, $\overleftrightarrow{xx} \perp \overleftrightarrow{yy}$ y $\overleftrightarrow{yy} \perp \overleftrightarrow{xx}$. Cuando dos rectas se cortan determinando cuatro ángulos se dice que las dos rectas son **perpendiculares entre sí**.

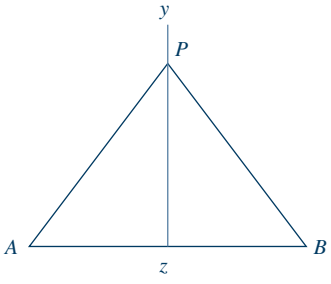
Mediatriz. Se entiende por *mediatriz* o *perpendicular bisectriz de un segmento* a la perpendicular trazada a dicho segmento por su punto medio.



Demostración

$\overline{yz}$ es la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, z es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. $\quad \therefore \quad \overline{yz} \perp \overline{AB}$

Teorema. Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de este segmento.



Demostración

P es un punto de la mediatriz $\overleftrightarrow{yz}$.

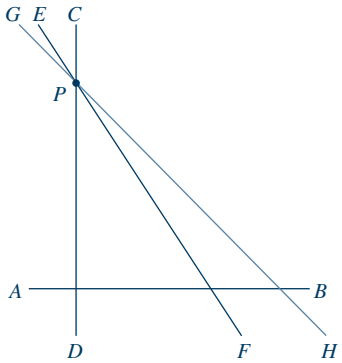
z es el punto medio del segmento $\overline{AB}$. $\quad \therefore \quad \overline{yz} \perp \overline{AB}$

$\overline{Az} = \overline{zB} \quad \therefore \quad P$ equidista de los extremos A y B.

$\overline{AP} = \overline{BP}$ (oblicuas)

Recíproco. Es todo punto equidistante de los extremos de un segmento o un punto de la mediatriz de éste. Las rectas $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular $\overleftrightarrow{yz}$ (mediatriz) y P es un punto de dicha mediatriz (misma figura anterior).

Postulado. Por un punto fuera de una recta, en un plano pasa una perpendicular a dicha recta y sólo una.



Demostración

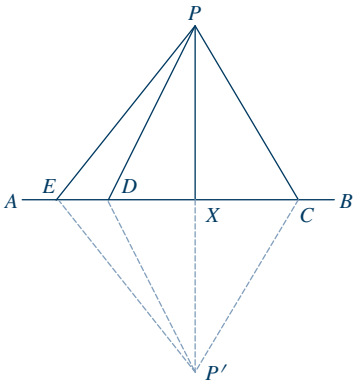
$\overleftrightarrow{AB}$ y P (un punto fuera de ella). Sólo una de todas las rectas que pasan por P y cortan a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a ella, es decir, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$.

Teorema. Si desde un punto exterior a una recta trazamos una perpendicular y varias oblicuas a dicha recta, se observa que:

a) La perpendicular es menor que cualquier oblicua.

b) Las oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales.

c) De dos oblicuas, la que más se aleja del pie de la perpendicular es mayor.



Demostración

Sea $\overline{PX} \perp \overline{AB}$; $\overline{PC}$, $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ son oblicuas.

a) $\overline{PX} < \overline{PC} = \overline{PD} < \overline{PE}$

b) $\overline{XC} = \overline{XD} \ \therefore \overline{PC} = \overline{PD}$

c) $\overline{PE} > \overline{PD}$

Construcción auxiliar

Doblemos la figura por la recta $\overleftrightarrow{AB}$ (postulado del movimiento). El punto P ocupará la posición P' de manera que:

$$\overline{PX} = \overline{P'X} \text{ y } P'E = PE$$
$$P'D = PD$$
$$P'C = PC$$

Recíproco. Si desde un punto exterior a una recta se trazan a ésta una perpendicular y varias oblicuas, se observa que:

a) El menor de todos los segmentos comprendidos entre el punto y la recta es perpendicular a ésta.

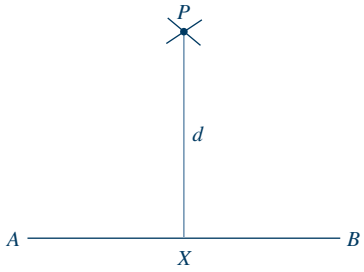
b) Si dos segmentos oblicuos son iguales, sus pies equidistan del pie de la perpendicular.

c) Si dos segmentos oblicuos son desiguales, el pie del segmento mayor dista más del pie de la perpendicular que el pie del segmento menor.

Distancia de un punto a una recta

Es la longitud de la perpendicular trazada desde el punto a la recta; este segmento tiene la propiedad de ser único y el de menor longitud posible.

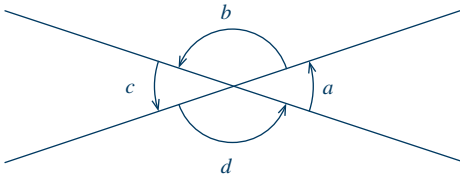
$\overleftrightarrow{AB}$ es la recta; P es el punto desde el cual se traza la $\perp$ a la recta $\overleftrightarrow{AB}$.



d es la longitud de un punto P a una recta $\overleftrightarrow{AB}$.

Definición de rectas oblicuas

Dos rectas son oblicuas cuando al cortarse no son perpendiculares, es decir, no forman cuatro ángulos iguales (ángulos adyacentes desiguales).



$\measuredangle a < \measuredangle b$

$\measuredangle c < \measuredangle d$

$a = c$ Por ese ángulo opuesto.

$b = d$ Por el vértice.

Su igualdad es evidente porque:

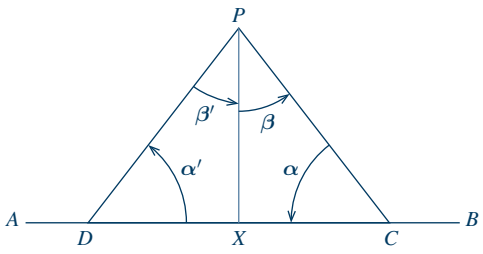
$$\left.\begin{aligned} a + b &= 180° \\ a + d &= 180° \end{aligned}\right\} \therefore \quad b = d$$

$$\left.\begin{aligned} b + c &= 180° \\ b + a &= 180° \end{aligned}\right\} \therefore \quad a = c$$

Corolarios

a) Desde un punto exterior a una recta sólo se pueden trazar dos oblicuas iguales.

b) Las oblicuas iguales forman ángulos iguales con la perpendicular y con la recta.



$\triangle PCX = \triangle PDX.$

$\overline{PX} \perp \overline{AB}$ Rectas perpendiculares entre sí.

$\overline{PC} = \overline{PD}$ Rectas oblicuas iguales.

$\overline{XC} = \overline{XD}$ Segmentos equidistantes.

Los ángulos α y α' al igual que los ángulos β y β', por pertenecer a triángulos iguales.

También a los puntos C y D que intersecan a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ se les llama *pies de las oblicuas*; al punto X se le denomina pie de la perpendicular.

Definición de rectas paralelas

Dos o más rectas coplanares, es decir, situadas en un mismo plano, son **paralelas** cuando no llegan a tener ningún punto en común, por más que se les prolongue; también se dice que dos rectas son paralelas, cuando son equidistantes, es decir, cuando todos los puntos de una de las rectas están a igual distancia de los puntos de la otra recta. Se utiliza el símbolo ‖ por la palabra paralela o la expresión **es paralela a**.

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

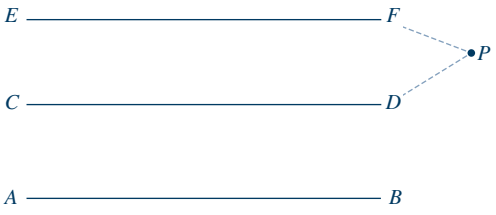
$\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{TU}$

Carácter recíproco del paralelismo. **Si una recta es paralela a otra, ésta a su vez es paralela a la primera.**

Carácter idéntico del paralelismo. **Toda recta es paralela a sí misma.**

Postulado de Euclides. **Por un punto exterior a una recta sólo se puede trazar una paralela a esta recta. La discusión de este postulado dio origen a la geometría no euclidiana.**

Corolario primero. **Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.**



Demostración

(Carácter transitivo del paralelismo)

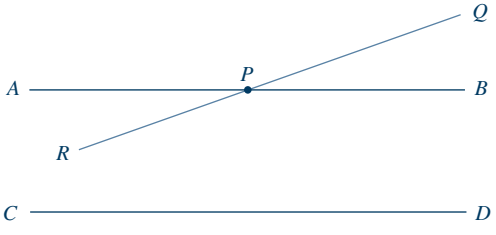
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

$\therefore \ \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

Si $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ no fueran paralelas se cortarían en un punto P.

Corolario segundo. **Si dos rectas son paralelas, toda recta que corta una de ellas corta también la otra.**



Demostración

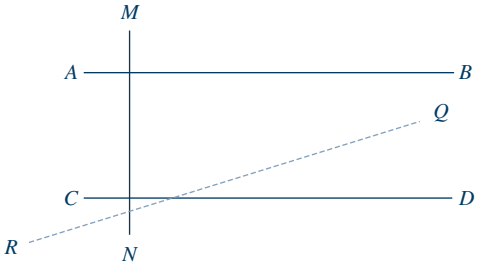
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{RQ}$ corta a $\overleftrightarrow{AB}$ en P

$\therefore \ \overleftrightarrow{RQ}$ también corta a $\overleftrightarrow{CD}$

Si $\overleftrightarrow{RQ}$ no corta a $\overleftrightarrow{CD}$ entonces sería paralela a ella, lo cual es imposible ya que tendríamos por P dos paralelas a $\overleftrightarrow{CD}$; $\therefore$ $\overleftrightarrow{RQ}$ también corta a $\overleftrightarrow{CD}$.

Corolario tercero. Si dos rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a la otra.



Demostración

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$

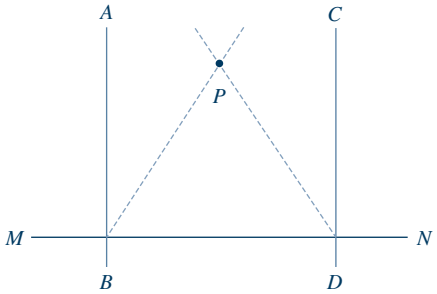
$\therefore$ $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$

Si $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$ también $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$: si P es la intersección de $\overleftrightarrow{MN}$ con $\overleftrightarrow{CD}$ y no son perpendiculares entre sí, por P se traza $\overleftrightarrow{RQ} \perp \overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{RQ} \parallel \overleftrightarrow{AB}$, es decir, por P pasarán dos paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$, las $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{RQ}$; como esto es imposible, $\therefore$ $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

Teorema. Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.

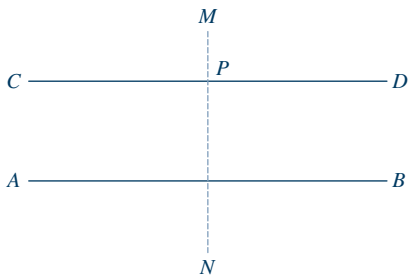
$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{MN}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



Suponiendo que $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$, tendrían un punto común, por ejemplo P, y desde este punto pasarían dos perpendiculares a $\overleftrightarrow{MN}$, lo cual resulta imposible. $\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$.

Corolario. Por un punto exterior a una recta pasa una paralela a dicha recta; sea P un punto exterior y $\overleftrightarrow{AB}$ una recta dada, trazamos por P una recta $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Por el mismo punto se traza la recta $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{MN}$; por el teorema anterior, resulta que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.



EJERCICIO 10

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En equipo, respondan en su cuaderno las siguientes preguntas y en plenaria socialicen sus respuestas.

1. Define las rectas perpendiculares.
2. ¿Qué es la mediatriz?
3. Escribe y demuestra el teorema de la mediatriz.
4. Explica la distancia de un punto a una recta.
5. ¿Qué son las rectas oblicuas?
6. Escribe los corolarios de las rectas oblicuas.
7. Define las rectas paralelas.
8. Enuncia el postulado de Euclides para el paralelismo.
9. Escribe y demuestra los tres corolarios del paralelismo.
10. Demuestra el siguiente teorema: *dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí.*

II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

1. Traza una perpendicular en el punto medio de un segmento.

2. Traza una perpendicular en un punto cualquiera de una recta.

3. Traza una perpendicular en un extremo de un segmento sin prolongarlo.

4. Por un punto *P* exterior a una recta dada, traza a ésta una paralela.

5. Traza la mediatriz de un segmento dado y las oblicuas cuyos pies equidisten del pie de la mediatriz.

6. Traza dos rectas paralelas cortadas oblicuamente por una secante.

III. En grupo, con asesoría de su profesor realiza las siguientes demostraciones.

1. Demuestra el carácter recíproco de la perpendicularidad.

2. Demuestra el postulado que establece: *por un punto fuera de una recta, en un plano, pasa una perpendicular a dicha recta y sólo una*.

3. Si desde un punto exterior a una recta trazamos una perpendicular y varias oblicuas a dicha recta, se observa que:

   a) La perpendicular es menor que cualquier oblicua.

   b) Las oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales.

   c) De dos oblicuas, la que más se aleja del pie de la perpendicular es mayor.

   Demuestra las observaciones anteriores del teorema.

4. Demuestra el carácter recíproco, idéntico y transitivo del paralelismo.

5. Demuestra el corolario: *por un punto exterior a una recta*, *pasa una paralela a dicha recta*.

IV. Realiza lo siguiente.

1. Representa los símbolos y notación de:

   a) Rectas perpendiculares.

   b) Rectas paralelas.

   c) Rectas oblicuas.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Distinción y notación de segmento, rayo y recta

Recta

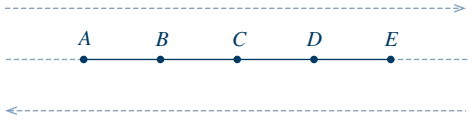
Línea recta es aquella que tiene todos sus puntos en una misma dirección; la notación de recta está dada por dos de sus puntos y el símbolo ↔ sobre ellos.

Ejemplo

Notación de la recta $\overleftrightarrow{AB}$

Todos los puntos pertenecientes a una recta pueden ser ordenados en dos formas distintas, que se conocen como **ordenamientos naturales**, los cuales son **opuestos**.

Ejemplo



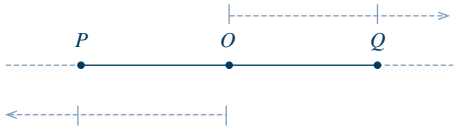
ler. ordenamiento: *A, B, C, D, E*…

2do. ordenamiento: *E, D, C, B, A*

Semirrecta o rayo

Al marcar en una recta cualquiera un punto *O*, llamado **origen**, la recta queda dividida en dos partes; cada parte forma una **semirrecta** o **rayo**. La notación de semirrecta o rayo está dada por dos de sus puntos (uno de ellos es el origen de la semirrecta o rayo) y el símbolo → sobre ellos.

Ejemplo



Semirrecta $\overrightarrow{OQ}$ con origen en *O* que contiene al punto *Q* y todos los que sigan ese ordenamiento natural.

Notación de la semirrecta $\overrightarrow{OQ}$

Semirrecta $\overrightarrow{OP}$ con origen en *O* que contiene al punto *P* y todos los que sigan ese ordenamiento natural.

Notación de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$

Cualquier punto de una recta es origen de dos semirrectas opuestas; al mismo punto se le denomina **frontera de las semirrectas**; la unión de dos semirrectas, determina una recta.

Segmento

Si en una recta cualquiera se marcan dos puntos *X* y *Y*, todos los puntos comprendidos entre ellos forman el **segmento de recta**; la notación de segmento está dada por dos de sus puntos y el símbolo ⟝⟞ sobre ellos.

Ejemplo

Notación del segmento $\overline{XY}$

Los puntos límites *X* y *Y* se llaman **extremos del segmento**; el punto *X* se denomina **extremo inicial** u **origen**, mientras que al punto *Y* se le denomina **extremo final**. Si los extremos del segmento coinciden, éste es **nulo**, es decir, su longitud o distancia es cero.

EJERCICIO 11

I. Escribe en el paréntesis de la izquierda el número que corresponda a la respuesta correcta, tomándolo de la lista de la derecha.

( ) Conjunto de puntos que se extiende sin límites en una misma dirección.

( ) Cuando la recta se divide en dos partes cada parte recibe este nombre.

( ) Es el punto origen de dos semirrectas.

( ) Lo forman todos los puntos comprendidos entre dos puntos que delimitan una recta.

( ) Se define como la coincidencia de los extremos del segmento.

1. Segmento nulo
2. Línea curva
3. Línea recta
4. Frontera
5. Semirrecta o rayo
6. Segmento

II. Contesta las siguientes preguntas.

1. Escribe los símbolos de notación o representación de:
   a) Línea recta
   b) Semirrecta o rayo
   c) Segmento
2. ¿Cuáles son las formas en que los puntos pertenecientes a una recta pueden ser ordenados?
3. ¿Qué nombre tiene la unión de dos semirrectas?
4. ¿Cómo se llaman los puntos límite de un segmento?
5. Elabora la gráfica de una línea recta, semirrecta o rayo y un segmento.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Medida de los segmentos rectilíneos

Segmentos orientados (vectores)

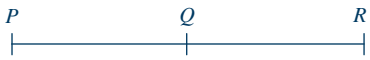
Un segmento cualquiera $\overline{AB}$ se dice orientado cuando los puntos A y B conservan cierto orden, es decir, A es el punto inicial y B es el punto final. Dicho segmento rectilíneo orientado se indica por $\overrightarrow{AB}$; en el caso contrario será $\overrightarrow{BA}$.

En todo segmento rectilíneo orientado el punto inicial se llama **origen** y el punto final se denomina **extremo**. La **dirección** es la que tiene la recta a la que pertenece, así como la de todas las paralelas a ella. La medida que depende de la unidad utilizada es conocida como **intensidad** o **magnitud**; el **sentido** depende del punto que se tiene como origen. Todo segmento orientado determina un vector, exactamente con sus mismas características.

Segmentos consecutivos

Dos segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ de una misma recta se denominan consecutivos cuando tienen solamente un extremo común y ningún otro punto en común.

Ejemplo



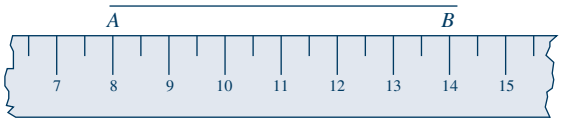
Segmentos consecutivos $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$

Extremo común: Q

Medida de segmentos

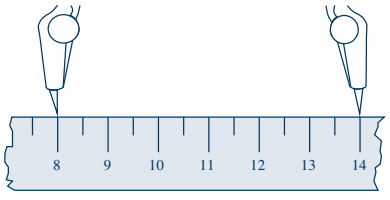
Para medir un segmento se establece una comparación entre el que se desea medir y otro que sirve de unidad; para este fin se emplean las unidades de longitud del sistema métrico decimal o del sistema inglés; los principales instrumentos que se usan son las reglas y cintas graduadas.

Las medidas del segmento $\overline{AB}$ se obtienen colocando la regla o cinta de tal manera que el origen o cero de la escala coincida con un extremo del segmento; luego se observa hasta qué punto de la recta numérica llega el segmento.



$\therefore \quad \overline{AB} = 6\,\text{cm}$

Si la regla o cinta de medir no puede hacerse coincidir con el segmento, se toma su longitud con un compás de puntas o bien con un cordel, y ésta se transporta al instrumento de medida para obtener su lectura.



Al efectuar la medición debe actuarse con exactitud y precisión con el fin de evitar errores debidos a la imperfección del instrumento de medición o del operador (generalmente errores visuales).

EJERCICIO 12

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. ¿Qué es un segmento orientado?
2. Explica qué son los segmentos consecutivos.
3. Describe los métodos para la medición de segmentos.

II. En el espacio, realiza lo que se te indica y socializa tus respuestas.

1. Dibuja un segmento orientado (vector), señalando su origen, extremo, dirección, magnitud y sentido.

2. Traza tres segmentos consecutivos de diferente magnitud; señala el extremo común.

3. Si B es el punto medio del segmento $\overline{AD}$, C es el punto medio de $\overline{BD}$ y $\overline{AD} = 30$ cm, determina las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$.

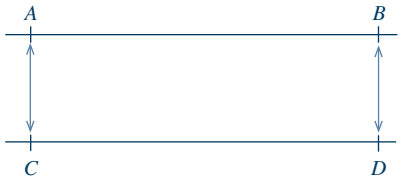
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Congruencia de segmentos

Igualdad y desigualdad de segmentos

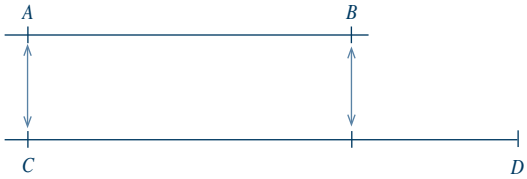
Si tenemos dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ y hacemos coincidir los extremos A y C, puede suceder:

a) Que el extremo B coincida con el extremo D del otro segmento, en cuyo caso $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales.



$\therefore \quad \overline{AB} = \overline{CD}$

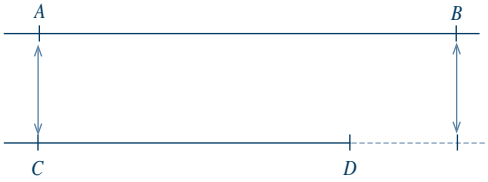
b) Que el extremo B se sitúe en un punto interior del segmento $\overline{CD}$, en cuyo caso $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son desiguales.



$\overline{AB} \neq \overline{CD}$

$\therefore \quad \overline{AB} < \overline{CD}$ o $\overline{CD} > \overline{AB}$

c) Que el extremo B se sitúe en un punto exterior del segmento $\overline{CD}$, en cuyo caso $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son desiguales.



$\overline{AB} \neq \overline{CD}$

$\therefore \quad \overline{AB} > \overline{CD}$ o $\overline{CD} < \overline{AB}$

Congruencia de segmentos

En los tres casos anteriores se observa que en el primer caso $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales, pues sus medidas son exactamente iguales. En geometría, se dice que el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{CD}$, lo cual se representa: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. En los casos segundo y tercero no existe la congruencia de segmentos, ya que $\overline{AB} \neq \overline{CD}$, lo cual se representa como $\overline{AB} \ncong \overline{CD}$.

Caracteres de la igualdad de segmentos

Como toda igualdad, los segmentos iguales o congruentes gozan de los caracteres **idéntico** o **reflejo**, **recíproco** o **simétrico** y **transitivo**.

Carácter idéntico o reflejo. Todo segmento es igual a sí mismo: $\overline{AB} = \overline{AB}$.

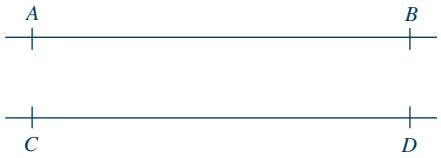
Carácter recíproco o simétrico. Si un segmento es igual a otro, el segundo es igual al primero: $\overline{AB} = \overline{CD}$ $\therefore$ $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Carácter transitivo. Si un segmento es igual a otros y éste a su vez es igual a un tercero, el primero y el tercero son iguales: $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{CD} = \overline{EF}$ $\therefore$ $\overline{AB} = \overline{EF}$.

Trazo de segmentos congruentes

Para trazar dos o más segmentos congruentes al propuesto $\overline{AB}$, se procede como sigue.

1. Con ayuda de la regla, se determina el valor del segmento $\overline{AB}$ y se traza exactamente con la misma longitud el segmento $\overline{CD}$ donde convenga.



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

2. Utilizando el compás, se hacen coincidir sus dos puntos con los extremos A y B del segmento propuesto y se traza una semirrecta donde se va a dibujar el nuevo segmento $\overline{CD}$; sin mover la abertura del compás, se hace coincidir una de las puntas en el punto C y la otra sobre la semirrecta para marcar el punto D.

3. En lugar de la regla y del compás, también se puede utilizar el borde de una hoja de papel o cartón y seguir un procedimiento análogo.

EJERCICIO 13

I. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Se tienen dos segmentos, $\overline{AB} = 12\,\text{cm}$ y $\overline{CD}$ de magnitud desconocida. Al hacer coincidir los extremos A y C, demuestra la igualdad y desigualdad de segmentos.

2. Dado el segmento $\overline{AB} = 7\,\text{cm}$, traza un segmento congruente al dado.

3. Demuestra los caracteres de la igualdad de segmentos.

II. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. ¿Qué es la congruencia de segmentos?
2. ¿Cuáles son los caracteres de la igualdad de segmentos?
3. ¿En qué consiste el carácter idéntico o reflejo?
4. Explica el carácter recíproco o simétrico.
5. ¿Qué es el carácter transitivo?
6. Describe los métodos para trazar segmentos congruentes.
7. ¿Cuál es la notación simbólica de la congruencia?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

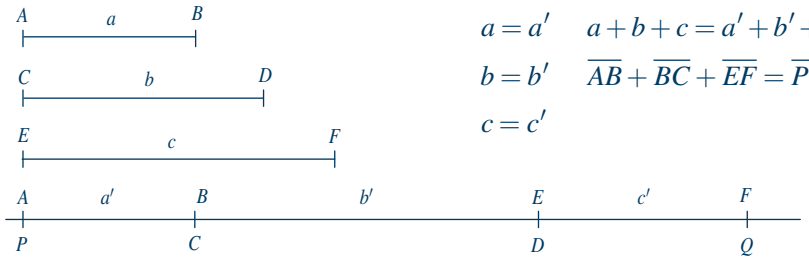
Operaciones con segmentos

Suma de segmentos

Definición I. Se llama **suma de varios segmentos consecutivos** al segmento que tiene por extremos al primero y al último de los extremos de los segmentos dados.

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$$

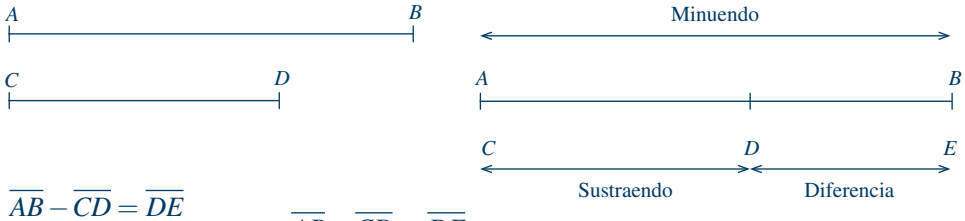
Definición II. Se llama **suma de varios segmentos cualesquiera**, dados en un cierto orden, a otro segmento que es suma de otros tantos segmentos consecutivos, respectivamente iguales a los dados.



$$a = a' \quad a + b + c = a' + b' + c' = \overline{PQ}$$
$$b = b' \quad \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{EF} = \overline{PQ}$$
$$c = c'$$

Sustracción de segmentos

Se llama **resta** o **diferencia** entre un segmento $\overline{AB}$ (**minuendo**) y otro $\overline{CD}$ (**sustraendo**) menor que aquél, al segmento $\overline{F}$ tal que sumando al segmento sustraendo dé por resultado el primer segmento $\overline{AB}$.



$\overline{AB} - \overline{CD} = \overline{DE}$

Si $\overline{DE} + \overline{CD} = \overline{AB}$ $\quad \therefore \quad \overline{AB} - \overline{CD} = \overline{DE}$

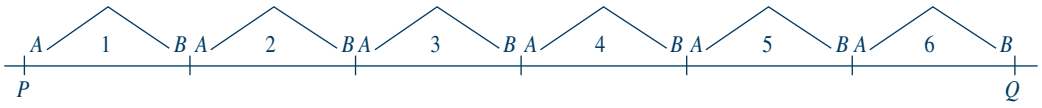
Multiplicación de un segmento (producto de un segmento por un escalar)

Se llama **producto de un segmento** $\overline{AB}$ por un escalar mayor que uno, al segmento que es suma de n segmentos iguales al dado, es decir:

$$\overline{AB} \cdot n \quad = \quad \underbrace{\overline{AB} + \overline{AB} + \ldots + \overline{AB}\ldots}_{n}, \text{ Cuando } n > 1$$

Ejemplo

Dado el segmento $\overline{AB}$, multiplicarlo por 6: $\overline{AB} \cdot 6 = \overline{PQ}$



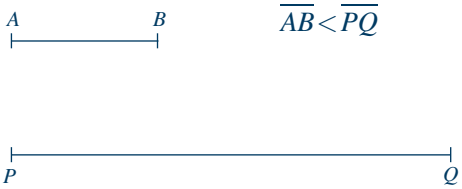
El segmento $\overline{PQ}$ es múltiplo del segmento $\overline{AB}$.

Postulado de Arquímedes

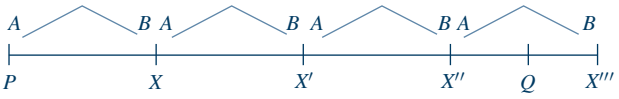
Dados dos segmentos desiguales, existe siempre un múltiplo de uno de ellos que es mayor que el otro.

Ejemplo

Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$, demuestra el postulado de Arquímedes.



$\overline{AB} < \overline{PQ}$



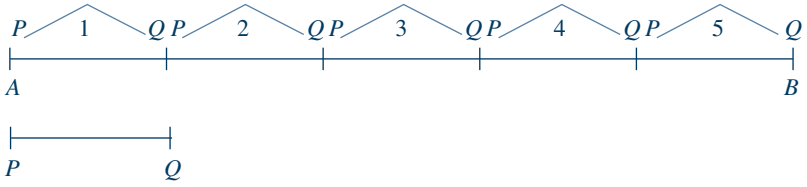
$\overline{AB} \times 1 = \overline{PX} < \overline{PQ}$
$\overline{AB} \times 2 = \overline{PX} < \overline{PQ}$
$\overline{AB} \times 3 = \overline{X} < \overline{PQ}$
$\overline{AB} \times 4 = \overline{PX} > \overline{PQ}$

División de un segmento

Dividir un segmento entre un número natural equivale a obtener otro segmento tal que, multiplicado por dicho número natural, sea igual al segmento propuesto.

Ejemplo

$\overline{AB} \div 5 = \overline{PQ}$, ya que: $\overline{PQ} \cdot 5 = \overline{AB}$

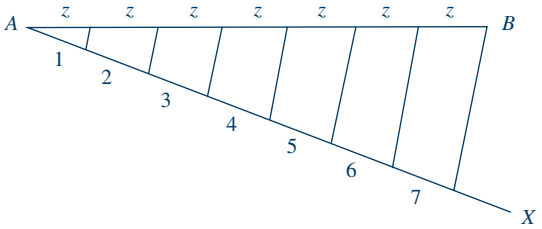


Un segmento se puede dividir en cualquier número de partes iguales mediante un sistema de paralelas. Por ejemplo, a partir de uno de los extremos del segmento propuesto $\overline{AB}$, se traza una semirrecta $\overline{AB}$ con cualquier inclinación; sobre $\overline{AX}$ y a partir de A, se mide un segmento de cualquier longitud (z), tantas veces como indica el divisor. El extremo del último segmento (z) se une con B y se trazan paralelas al segmento $\overline{Bn}$ (donde n indica el número de veces en que se divide el segmento propuesto). La relación de la operación se indica de la siguiente forma:

$$z = \frac{\overline{AB}}{n}$$

Ejemplo

Divide el segmento $\overline{AB}$ en 7 partes iguales.



Las operaciones anteriores se efectúan midiendo los segmentos y operando con las medidas obtenidas.

EJERCICIO 14

I. En el espacio, realiza lo que se indica y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Dibuja los segmentos y súmalos gráficamente.

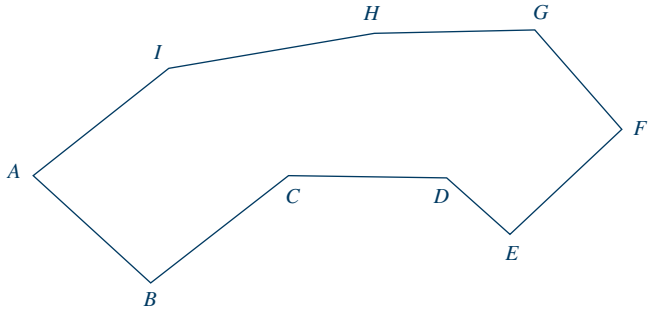
   a) $\overline{AB} = 3$ cm *b*) $\overline{CD} = 4$ cm *c*) $\overline{EF} = 6$ cm *d*) $\overline{GH} = 2$ cm

2. Dibuja los segmentos $\overline{AB} = 11$ cm (minuendo) y $\overline{CD} = 5$ cm (sustraendo); réstalos gráficamente.

3. Multiplica el segmento $\overline{AB} = 2$ cm por 5 y elabora la gráfica correspondiente.

4. Divide el segmento $\overline{AB} = 6$ cm en 4 partes iguales y elabora la gráfica correspondiente.

5. Dada la siguiente figura, demuestra que:
$\overline{AI} + \overline{IH} + \overline{HG} + \overline{GF} > \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$



6. Dado el siguiente segmento y aplicando el método del trazo de las paralelas, divídelo en 6 partes iguales.

Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Representa gráficamente una línea curva y una línea mixta.

2. Representa gráficamente dos planos en el espacio que sean secantes.

3. Dado el segmento $\overline{CD} = 12$ cm, traza un segmento congruente a éste.

4. Dibuja los segmentos $\overline{PQ} = 9$ cm (minuendo) y $\overline{RS} = 3$ cm (sustraendo) y réstalos gráficamente.

5. Divide el segmento $\overline{DE} = 15$ cm en tres partes iguales y elabora la gráfica correspondiente.

Unidad 3

Ángulos

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. En un ángulo a qué se le denomina *vértice*.

2. ¿Cuándo un ángulo es negativo y cuándo es positivo?

3. Según sus medidas, los ángulos se clasifican en:

4. ¿Cuánto vale la suma de dos ángulos suplementarios y qué tipo de ángulo forman?

5. ¿Cómo se clasifican los ángulos interiores y exteriores?

Ángulos

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición y notación de ángulo.
- Maneje los sistemas angulares.
- Opere las conversiones angulares.
- Conozca la congruencia de ángulos.
- Conozca la clasificación de los ángulos.
- Identifique los ángulos que se determinan con dos rectas paralelas cortadas por una transversal (secante).
- Realice demostraciones de teoremas sobre ángulos.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos con situaciones reales.
4. Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos y analíticos, mediante lenguaje verbal y matemático.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Definición y notación de ángulo.
- Sistemas empleados en la medida de ángulos.
- Conversión de grados a radianes y viceversa.
- Medición y trazo de ángulos.
- Congruencia de ángulos.
- Clasificación de los ángulos.
- Ángulos complementarios, suplementarios y conjugados.
- Ángulos que determinan dos rectas cortadas por una transversal (secante).
- Demostración de teoremas sobre ángulos.

Contenidos procedimentales

- Distinguirá los diferentes sistemas empleados en la medida de ángulos.
- Identificará los diferentes tipos de ángulos y si existe o no congruencia existente entre ellos.
- Debatirá si un ángulo es complementario, suplementario o conjugado.
- Demostrará teoremas sobre ángulos.
- Resolverá problemas basados en los axiomas aprendidos.

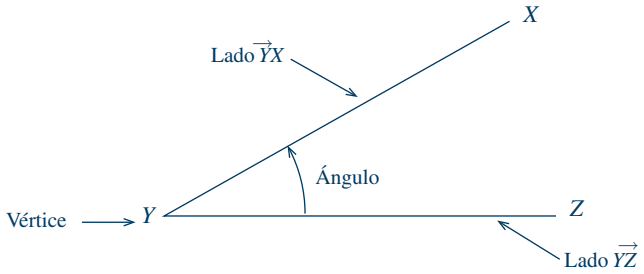
Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Definición y notación de ángulo

Definición de ángulo

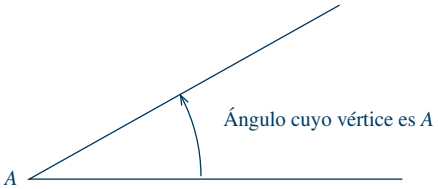
Se denomina **ángulo** a la abertura comprendida entre dos semirrectas o rayos que parten de un punto común llamado **vértice**; las semirrectas o rayos reciben el nombre de **lados del ángulo**.



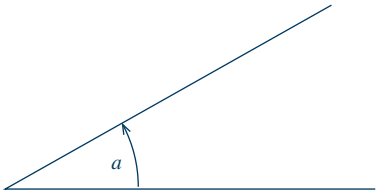
Nomenclatura de ángulo

La notación de un ángulo puede ser gráfica o simbólica de acuerdo con la necesidad de presentarlo.
Gráficamente se indica con un pequeño arco y, además, se designa por:

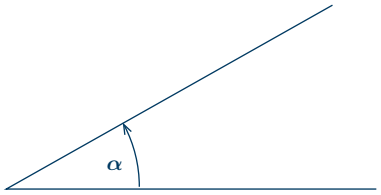
a) Una letra mayúscula situada en el vértice.



b) Una letra minúscula dentro del ángulo; generalmente se emplea una letra del alfabeto griego.

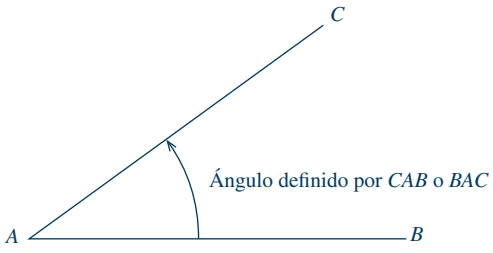


Ángulo cuyo valor es *a*



Ángulo cuyo valor es α

c) Tres letras mayúsculas de manera que quede en el medio la letra que está situada en el vértice del ángulo.



Simbólicamente, la notación se realiza anteponiendo a la letra el símbolo $\measuredangle$, o bien, colocando un pequeño ángulo sobre la letra.

Ejemplo

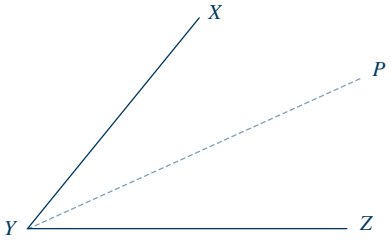
$\measuredangle z$ o $\hat{z}$ se lee ángulo z

$\measuredangle$ o $\hat{\phi}$ se lee ángulo ϕ

Si la notación se hace con las letras del ángulo, tenemos que: $\widehat{CAB}$ o $\widehat{BAC}$ se lee ángulo CAB o ángulo BAC.

Bisectriz del ángulo

Es la semirrecta que, partiendo del vértice, divide al ángulo en dos partes iguales.



$\overrightarrow{YP}$ es la bisectriz del $\measuredangle XYZ$.

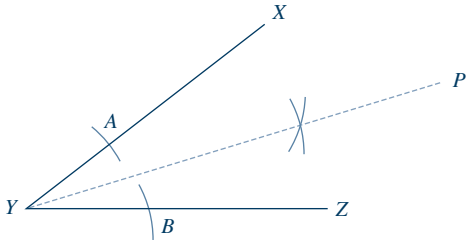
Trazo de la bisectriz del ángulo

Para el trazado de la bisectriz de un ángulo se procede de la siguiente forma:

a) Con una abertura cualquiera y haciendo centro en el vértice, se traza un arco de circunferencia que corta los lados del ángulo en dos puntos A y B.

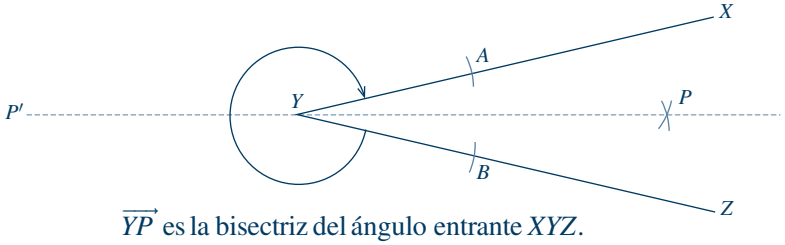
b) Con la misma abertura, haciendo centro en A y B, se trazan arcos que se cortan en un punto P.

c) La bisectriz del ángulo se obtiene uniendo con una regla el vértice Y con el punto P.



$\overrightarrow{YP}$ es la bisectriz del $\widehat{XYZ}$.

Si el ángulo es **entrante**, la bisectriz de este ángulo es la semirrecta opuesta a $\overrightarrow{YP}$.

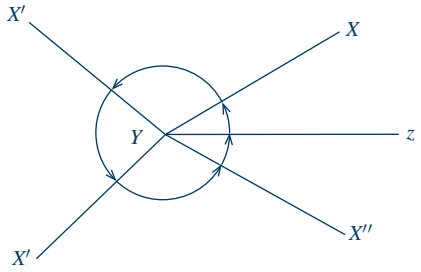


$\overrightarrow{YP}$ es la bisectriz del ángulo entrante XYZ.

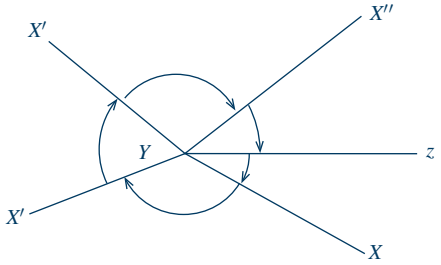
Generación de los ángulos

Un ángulo se considera **generado por dos semirrectas**, de las cuales una permanece fija y la otra gira alrededor de un punto fijo de la primera semirrecta (vértice del ángulo).

Si el sentido es contrario al giro de las manecillas del reloj, **el ángulo es positivo**; si gira en el mismo sentido que las manecillas del reloj, **el ángulo es negativo**.



Ángulo positivo



Ángulo negativo

EJERCICIO **15**

I. Contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

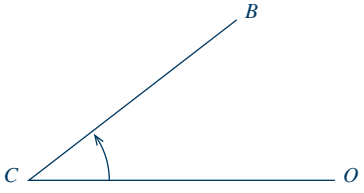
1. Define ángulo.
2. Gráficamente, ¿cuál es la notación de ángulo?
3. Simbólicamente, ¿cuál es la notación de ángulo?
4. ¿Qué es la bisectriz del ángulo?
5. Explica el procedimiento para trazar la bisectriz del ángulo.
6. Si el giro del ángulo es contrario al giro de las manecillas del reloj, ¿qué signo tiene?

II. Resuelve los siguientes problemas gráficos y en plenaria discutan los resultados.

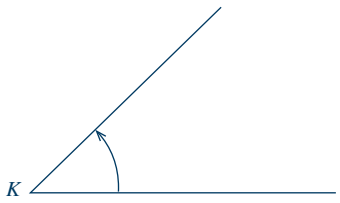
1. En el espacio, dibuja un ángulo, indicando las partes del mismo.

2. Escribe la notación gráfica para los siguientes ángulos.

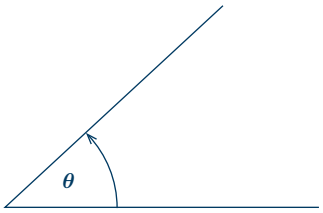
a)



b)

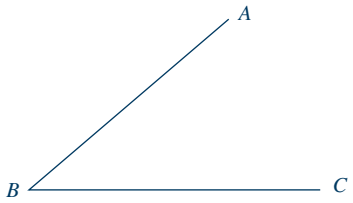


c)

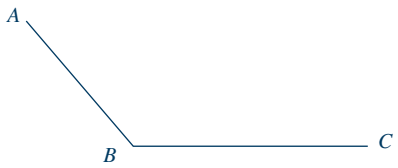


3. Traza la bisectriz de los siguientes ángulos.

a)



b)



4. En el espacio, representa gráficamente la generación de ángulos positivos y negativos.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Sistemas empleados en la medida de ángulos

Medidas de ángulos

La magnitud de un ángulo no depende de la longitud de sus lados, sino de la abertura o separación que hay entre ellos; es decir, la medida de un ángulo se obtiene comparando la amplitud del ángulo con la amplitud de otro considerado como unidad patrón. Para medir un ángulo se conocen tres sistemas diferentes de unidades angulares.

Sistema sexagesimal. Es un sistema tradicional de uso común, creado por los sumerios, quienes conociendo el círculo y la circunferencia, los dividieron en 360 partes iguales, mismas que corresponden a cada uno de los días del año; cada división recibe el nombre de **grado**. Un ángulo de un grado es aquel que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y cuyos lados pasan por dos divisiones consecutivas.

Cada grado es igual a $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta de la circunferencia; corresponde decir que un **grado** es $\frac{1}{90}$ del ángulo recto; un grado dividido en 60 partes iguales da lugar a los **minutos** y un minuto dividido en 60 partes iguales da lugar a los **segundos**. La simbología para cada una de estas unidades es:

Grado ($^\circ$)

Minuto ($'$)

Segundo ($''$)

$1^\circ = 60' = 3600''$

$1' = 60''$

Para casos que requieren mayor exactitud se utilizan los décimos y centésimos de segundo.

Sistema centesimal. Para este sistema se considera a la circunferencia dividida en 400 partes iguales, denominadas **grados centesimal**; cada grado centesimal tiene 100 **minutos centesimales** y un minuto centesimal tiene 100 **segundos centesimales**.

La simbogía para cada una de estas unidades es:

Grado centesimal (g)

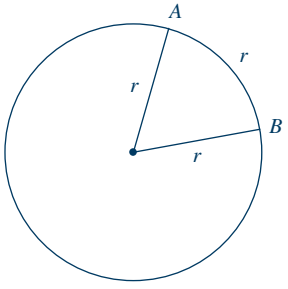
Minuto centesimal (m)

Segundo centesimal (s)

1g = 100m = 10 000s

1m = 100s

Sistema circular. La unidad fundamental de este sistema es el **radián**, el cual se define como el ángulo cuyos lados comprenden un arco cuya longitud es igual al radio de la circunferencia.



Longitud del arco AB es igual al radio (r) de la circunferencia.

$\therefore \quad \widehat{AOB} = 1$ radián

La longitud de la circunferencia es 2π; por lo tanto, para un ángulo de 360° la equivalencia es 2π radianes, es decir 6.2832 radianes, donde π tiene el valor de 3.1416 radianes.

De la relación radián $= \frac{360}{2\pi}$ se tiene que:

1 radián $= 57.295777^\circ$

1 radián $= 57^\circ 17' 44''$

EJERCICIO 16

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

1. ¿Cuál es el nombre de los sistemas empleados para medir ángulos?
2. Explica los principios del sistema sexagesimal.
3. ¿Cuál es el nombre y símbolo de las unidades del sistema sexagesimal?
4. Explica los principios del sistema centesimal.
5. ¿Cuál es el nombre y símbolo de las unidades del sistema centesimal?
6. ¿Cómo se define un radián?

II. En equipo de dos personas, resuelvan los siguientes problemas de equivalencia y en plenaria discutan sus resultados.

1. Si un grado sexagesimal es igual a 60 minutos, ¿$13°$ cuántos minutos son?

2. Si un minuto sexagesimal es igual a 60 segundos, ¿$27'$ cuántos segundos son?

3. ¿A cuántos segundos sexagesimales equivalen $48°59'$?

4. ¿A cuántos grados y minutos sexagesimales equivalen $94°380''$?

5. ¿A cuántos radianes equivale la longitud de cualquier circunferencia?

6. ¿Cuál es el resultado de la relación $\frac{360°}{2\pi}$?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Conversión de grados a radianes y viceversa

Relación entre grado sexagesimal y el radián

Si 2π radianes equivalen a 360°, ¿un radián a cuántos grados sexagesimales equivaldrá? Para dar respuesta es necesario establecer la siguiente relación:

$$2\pi \text{ radianes} \rightarrow 360°$$
$$1 \text{ radián} \rightarrow X \text{ (grados sexagesimales)}$$

Despejando, tenemos:

$$X \text{ (grados sexagesimales)} = \frac{(360°)(1 \text{ radián})}{2\pi \text{ radianes}}$$

Simplificando: $X° = \dfrac{180°}{\pi}$ Fórmula para convertir radianes a grados sexagesimales.

Si establecemos la siguiente relación:

$$360° \rightarrow 2\pi \text{ radianes}$$
$$1° \rightarrow X \text{ radianes}$$

Despejando y simplificando tenemos:

$$X \text{ radianes} = \frac{(2\pi \text{ radianes})(1°)}{360°} = \frac{\pi \text{ radianes}}{180°}$$

Fórmulas para convertir grados sexagesimales a radianes.

En ambas fórmulas se toma $\pi = 3.1416$ radianes.

Equivalencias de uso común

$10° = \dfrac{\pi}{18}$ radianes

$30° = \dfrac{\pi}{6}$ radianes

$45° = \dfrac{\pi}{4}$ radianes

$60° = \dfrac{\pi}{3}$ radianes

$90° = \dfrac{\pi}{2}$ radianes

$120° = \dfrac{2\pi}{3}$ radianes

$135° = \dfrac{3\pi}{4}$ radianes

$150° = \dfrac{5\pi}{6}$ radianes

$180° = 2\pi$ radianes

$210° = \dfrac{7\pi}{6}$ radianes

$225° = \frac{5\pi}{4}$ radianes

$240° = \frac{4\pi}{3}$ radianes

$270° = \frac{3\pi}{2}$ radianes

$300° = \frac{5\pi}{3}$ radianes

$315° = \frac{7\pi}{4}$ radianes

$330° = \frac{11\pi}{6}$ radianes

$360° = 2\pi$ radianes

$1° = \frac{\pi}{180} = 0.0174533$ radianes

$1' = \frac{\pi}{10\ 800} = 0.0002909$ radianes

$1'' = \frac{\pi}{648\ 000} = 0.000004848$ radianes

EJEMPLOS

Ejemplos

Solución de problemas

1 Expresa en grados sexagesimales un ángulo de 4.36 radianes.

$$X° = \frac{(180°)(4.36\ \cancel{\text{radianes}})}{\pi\ \cancel{\text{radianes}}} = \frac{784.8°}{3.1416} = 249.8090145°$$

$$\therefore \quad X° = 249.8090145°$$

Expresado en grados, minutos y segundos sexagesimales:

$$\therefore \quad X° = 249°48'32''$$

2 Expresa $\frac{3\pi}{8}$ radianes en grados sexagesimales.

$$X° = \frac{(180°)\left(\frac{3\pi}{8}\ \cancel{\text{radianes}}\right)}{\pi\ \cancel{\text{radianes}}} = \frac{(180°)(3\cancel{\pi})}{8\pi} = \frac{540°}{8} = 67.5°$$

Expresado en grados, minutos y segundos sexagesimales:

$$X° = 67°30'0''$$

3 Expresar 108° en radianes.

$$X \text{ radianes} = \frac{(\pi \text{ radianes})(108\cancel{°})}{180\cancel{°}} = \frac{(3.1416 \text{ radianes})(108)}{180} = 1.88496 \text{ radianes}$$

4 ●●• Expresa $74°47'$ en radianes.

Primero se convierten los minutos en grados.

$$\text{Si } 60' \rightarrow 1°$$
$$47' \rightarrow X°$$
$$X° = \frac{(47')(1°)}{60'}$$
$$X° = 0.783333°$$
$$\therefore \quad 74°47' = 74.783333°$$

$$X \text{ radianes} = \frac{(\pi \text{ rad})(74.783333^{\circ})}{180^{\circ}}$$
$$X \text{ rad} = \frac{(3.1416 \text{ rad})(74.783333)}{180} = 1.3052184 \text{ rad}$$

5 ●●• Expresa $143°52'36''$ en radianes.

Primero se convierten los segundos en minutos y éstos a su vez en grados.

$$\text{Si } 60'' \rightarrow 1'$$
$$36'' \rightarrow X'$$
$$X' = \frac{(52.6'')(1')}{60''}$$
$$X' = 0.6'$$

$$\text{Si } 60' \rightarrow 1''$$
$$52.6' \rightarrow X°$$
$$X° = \frac{(36')(1°)}{60'}$$
$$X° = 0.876666°$$

$$\therefore \quad 143°52'36'' = 143.876666°$$

$$X \text{ rad} = \frac{(\pi \text{ rad})(143.876666^{\circ})}{180^{\circ}}$$
$$X \text{ rad} = \frac{(3.1416 \text{ rad})(143.876666)}{180}$$
$$X \text{ rad} = 2.5111274 \text{ rad}$$

6 ●●• Expresa 1.437526 en grados, minutos y segundos sexagesimales.

$$X° = \frac{(180°)(1.4367526\ \cancel{\text{rad}})}{\pi\ \cancel{\text{rad}}} = \frac{258.75468°}{3.1416} = 82.36398014°$$

Si $1° \rightarrow 60'$

$0.36398014° \rightarrow X'$

$$X' = \frac{(60')(0.36398014\cancel{°})}{1\cancel{°}} \qquad X' = 21.83880822'$$

Si $1° \rightarrow 60''$

$0.83880822' \rightarrow X''$

$$X'' = \frac{(60'')(0.83880822\cancel{'})}{1\cancel{'}} \qquad X'' = 50.3284932''$$

Ordenando los grados, minutos y segundos, tenemos $82°21'50''$.

Nota: Se recomienda emplear la calculadora científica en apoyo a las operaciones indicadas, así como para la comprobación de dichas conversiones en los problemas.

EJERCICIO 17

I. En grupo, con asesoría de su profesor resuelvan los siguientes problemas sobre la conversión de grados a radianes y viceversa.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos.

   a) 5.63 radianes _____ *c*) 7.81 radianes _____

   b) 2.49 radianes _____ *d*) 9.4248 radianes _____

2. Expresa los siguientes ángulos en radianes.

   a) 38° _____ *c*) 255° _____

   b) 147° _____ *d*) 660° _____

3. Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales los siguientes ángulos.

   a) 0.79483 radianes _____ *c*) 2.96571 radianes _____

   b) 1.25869 radianes _____ *d*) 3.54209 radianes _____

4. Expresa en radianes los siguientes ángulos.

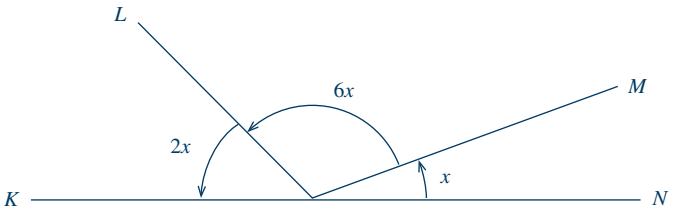
a) 41°20′54″ _____

b) 171°29′43″ _____

c) 219°05′36″ _____

d) 327°53′12″ _____

5. Si $\measuredangle KOL = 2x$, $\measuredangle LOM = 6x$ y $\measuredangle MON = x$, ¿cuánto mide cada ángulo?



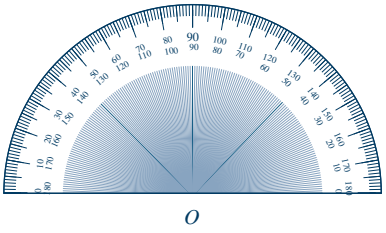
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Medición y trazo de ángulos

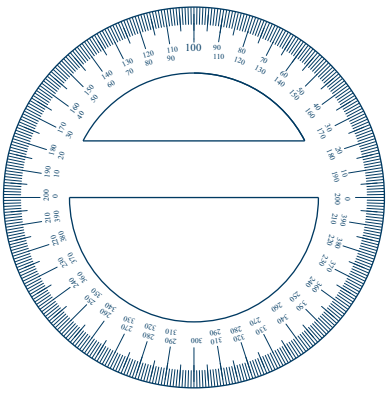
Introducción

Para la medición de ángulos se emplea un instrumento denominado **transportador**, el cual puede ser circular o semicircular.

Como el sistema de uso común es el sexagesimal, el transportador está dividido en grados. El transportador circular es un círculo dividido en 360 partes iguales, se confecciona de material transparente, en el cual se ha marcado con toda exactitud el centro y un diámetro de 0° a 180°; el transportador semicircular es un semicírculo dividido en 180 partes, igualmente marcados con toda precisión y claridad el centro y el diámetro de 0° a 80°.



Transportador semicircular

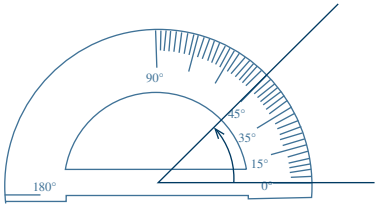


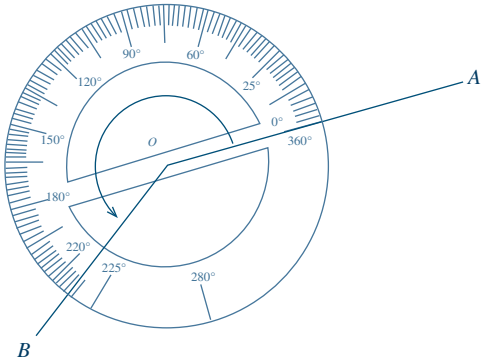
Transportador circular

Medición

Para medir los ángulos menores de 180° se emplea el transportador semicircular, el cual se maneja de la siguiente manera: el centro del transportador se hace coincidir con el vértice del ángulo, y la división que indica 0° con uno de los lados; sobre la escala se obtiene la lectura en la marca que coincida con el otro lado del ángulo.

Para ángulos mayores de 180° se emplea el transportador circular, el cual se opera de la misma manera que el transportador semicircular.



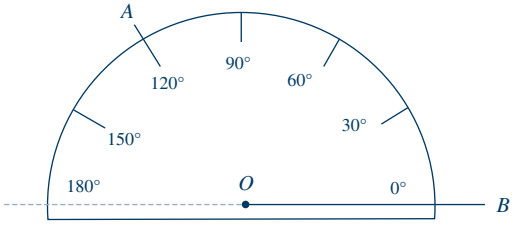


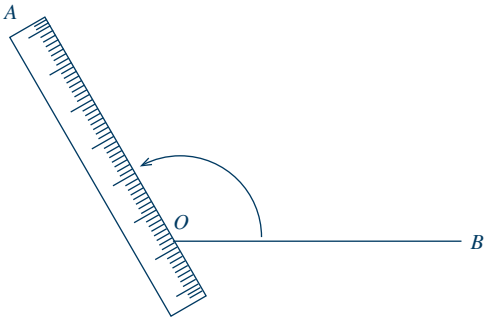
Trazo

Cuando se conoce el valor de un ángulo, expresado en grados, su trazo se realiza con el auxilio de regla y transportador (semicircular o circular), actuando de la siguiente manera: se traza una semirrecta horizontal, se hace coincidir el centro del transportador con el punto de origen de la semirrecta y la división que marca 0° sobre la misma; sobre la escala se busca el valor numérico propuesto, haciendo una pequeña marca, la cual por medio de la regla se une al punto origen de la semirrecta.

Ejemplo

Traza un ángulo de 120°





EJERCICIO 18

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

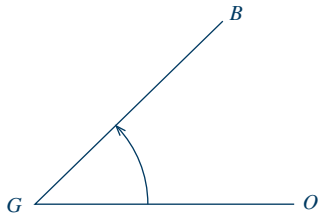
Competencias disciplinares

1. ¿Cuál es el nombre del instrumento empleado en la medición de ángulos?
2. ¿Cuáles son las características del transportador semicircular y circular?
3. Bajo tus propias palabras, ¿cómo enunciarías el proceso de medición de ángulos menores de 180°?
4. ¿Cuál es el proceso para trazar un ángulo sexagesimal?

II. En equipo de dos personas, resuelvan los siguientes problemas gráficos y en plenaria discutan sus respuestas.

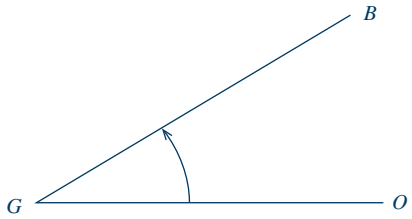
1. Haciendo uso del transportador circular o semicircular, mide los siguientes ángulos sexagesimales.

a)



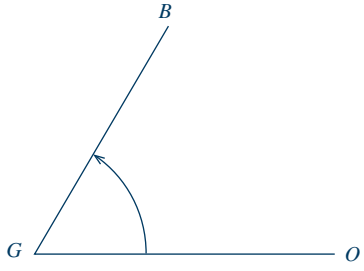
$\widehat{BGO} =$ _____

b)



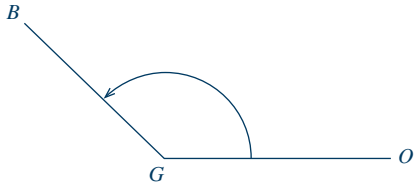
$\widehat{BGO} =$ _____

c)



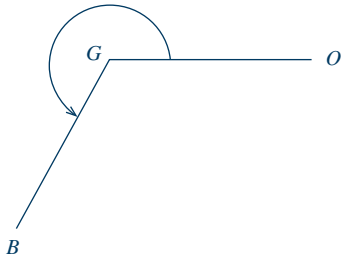
$\widehat{BGO} =$ _____

d)



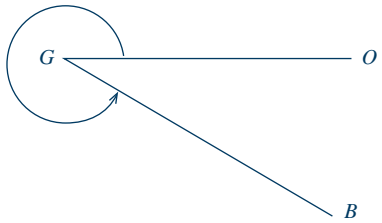
$\widehat{BGO} =$ _____

e)



$\widehat{BGO} =$ _____

f)



$\widehat{BGO} =$ _____

2. Con auxilio de regla y transportador traza los siguientes ángulos sexagesimales.

a) 35°

b) 120°

c) 225°

d) 260°

e) 315°

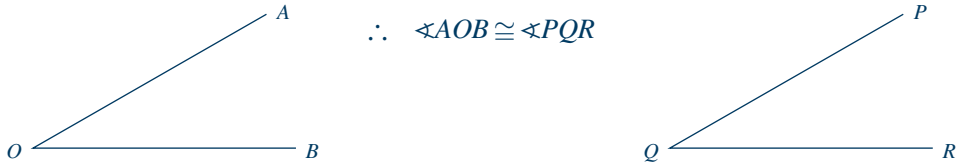
f) 355°

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Congruencia de ángulos

Ángulos congruentes

Dos ángulos que tienen una misma medida son **congruentes**, es decir, que la congruencia de ángulos es una relación de equivalencia.



Como toda igualdad, la congruencia de ángulos goza de los caracteres de idéntico o reflejo, recíproco o simétrico y transitivo.

Trazo de ángulos congruentes

Si se tiene $\measuredangle AOB$ y se desea trazar el congruente $\measuredangle PQR$, se desarrollan los pasos siguientes:

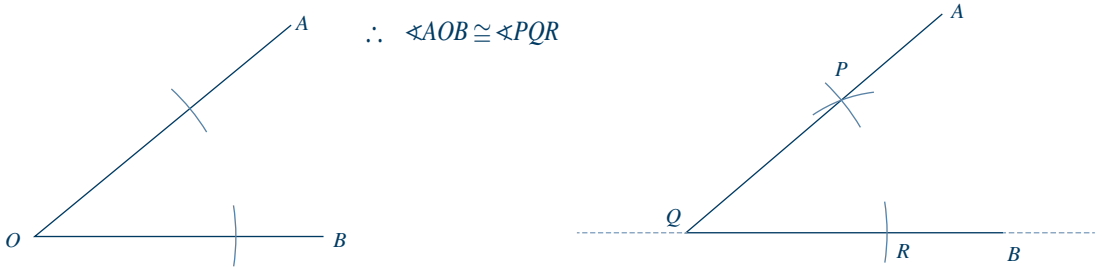
a) Se traza la recta $\overleftrightarrow{QR}$ marcando los puntos Q y R.

b) Con apoyo del compás en el $\measuredangle AOB$, haciendo centro en O se traza un arco de circunferencia de cualquier abertura que corte a las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

c) Con el compás, haciendo centro en Q y con la misma abertura, se traza un arco que corte a $\overleftrightarrow{QR}$ en el punto T.

d) Nuevamente con el compás se determina la amplitud del arco que corta al anterior en el punto P.

e) Con la ayuda de la regla se une P con Q, y así se obtiene el ángulo deseado.



Un método práctico consiste en emplear papel transparente para trazar un ángulo que quede superpuesto al ya dibujado y llevarlo para su trazo a donde se desee; así se obtiene la congruencia de ángulos deseados.

EJERCICIO 19

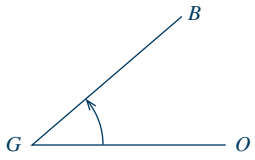
I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué son los ángulos congruentes?
2. ¿Goza la congruencia de ángulos del carácter transitivo de la igualdad?
3. ¿Cuál es el proceso para trazar ángulos congruentes?

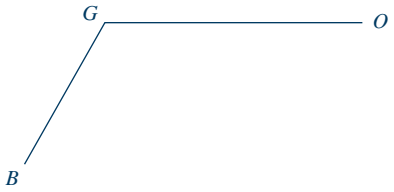
II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

1. Dados los siguientes ángulos, traza sus respectivos ángulos congruentes.

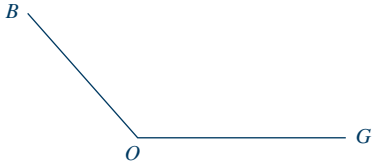
a)



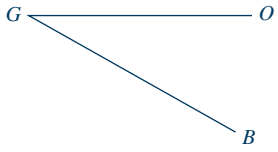
b)



c)



d)

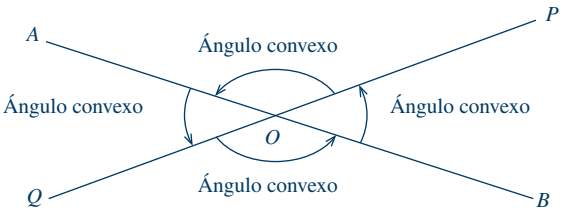


Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

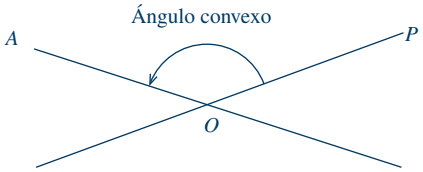
Clasificación de los ángulos

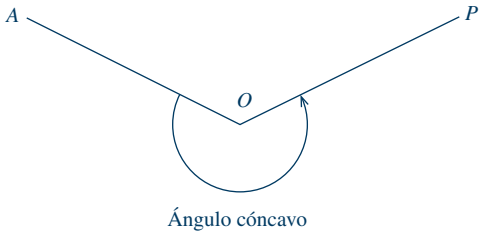
Ángulos convexos y cóncavos

Si en un plano se trazan dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ que se cruzan en un punto O, el plano queda dividido en cuatro partes, cada una de las cuales es un **ángulo convexo**.



Considerando sólo un ángulo convexo, el punto O es el vértice del ángulo y las semirrectas que lo limitan son los lados del ángulo. Si consideramos la parte exterior del ángulo convexo, se tiene un **ángulo cóncavo**.



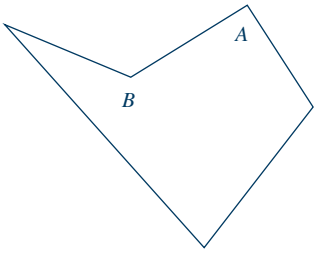


$\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OP}$ lados.

O vértice.

Por tanto, el ángulo convexo es aquel que tiene las prolongaciones de sus lados hacia el exterior (A).

El ángulo cóncavo es aquel que tiene las prolongaciones de sus lados hacia el interior (B).

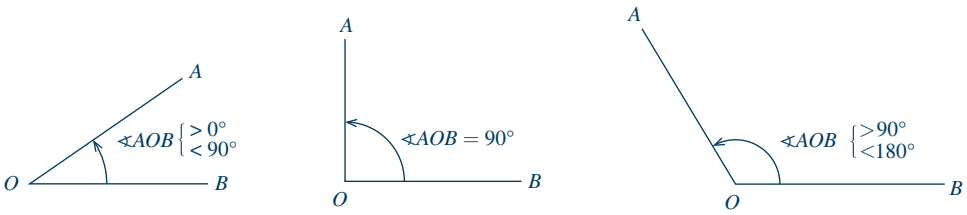


Clasificación de los ángulos por sus medidas

Ángulo agudo. Es todo ángulo cuya medida está comprendida entre 0° y 90°, es decir, menor que un recto (90°).

Ángulo recto. Es aquel cuya medida es 90°, por lo tanto, es la mitad de un ángulo llano (180°).

Ángulo obtuso. Es todo ángulo cuya medida es mayor que un ángulo recto (90°), y menor que un ángulo llano (180°), es decir, su medida está comprendida entre 90° y 180°.



Ángulo colineal o llano. Es aquel cuya medida es 180°; si el ángulo tiene sus lados colineales, ello indica que los dos son semirrectas opuestas. Dos ángulos rectos dan lugar a un ángulo colineal o llano.

Ángulo entrante. Es todo ángulo cuya medida es mayor que un ángulo llano (180°), y menor que un ángulo perígono (360°), es decir, su medida está comprendida entre 180° y 360°.

Ángulo perígono. Es el ángulo en el que uno de sus lados coincide con el otro formando un arco de una circunferencia, cuyo valor es 360°.

Ángulo colineal o llano

$\sphericalangle AOB = 180°$

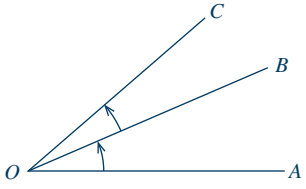
Ángulo entrante

Ángulo perígono $\sphericalangle AOB = 360°$

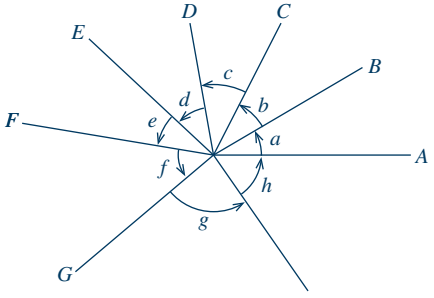
Diferentes clases de ángulos

Ángulos consecutivos. Dos ángulos son consecutivos cuando tienen un lado en común y el mismo vértice.

Varios ángulos son consecutivos si el primero es consecutivo del segundo, éste del tercero y así sucesivamente.



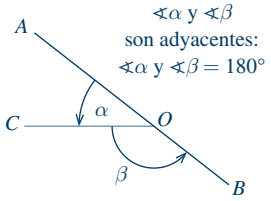
O = vértice
$\overrightarrow{OB}$ Lado en común
$\therefore \sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC$
son consecutivos.



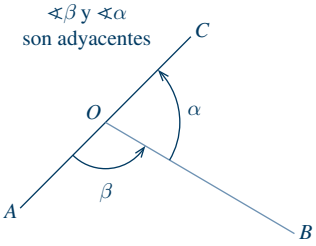
$\sphericalangle a, \sphericalangle b, \sphericalangle c, \sphericalangle d, \sphericalangle e, \sphericalangle f, \sphericalangle g, \sphericalangle h$
son consecutivos.

Dos rectas que se cortan en un punto forman cuatro ángulos y, de acuerdo con la posición en la que se encuentran colocados, reciben el nombre de **adyacentes** y **opuestos por el vértice**.

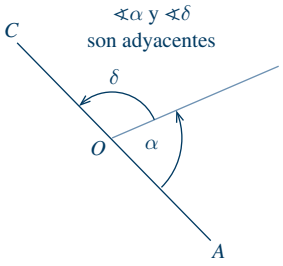
Ángulos adyacentes. Dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos, es decir tienen un lado en común y los dos lados no comunes son semirrectas opuestas; los ángulos adyacentes forman un ángulo colineal o llano (180°); por consecuencia los ángulos adyacentes son **suplementarios**.



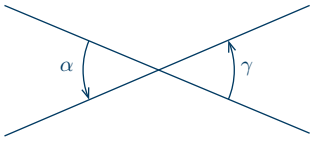
OB lado común
∢*AOB* y ∢*BOC*
son consecutivos,
colineal o llano



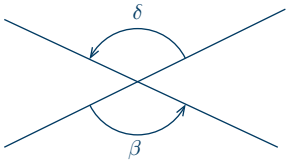
∴ ∢*AOB* y ∢*BOC*
son adyacentes



Ángulos opuestos por el vértice. Se dice que dos ángulos son opuestos por el vértice cuando los lados de uno de ellos son las prolongaciones de los lados del otro.



∢α y ∢γ son opuestos
por el vértice,
∴ ∢α = ∢γ



∢β y ∢δ son opuestos
por el vértice,
∴ ∢β = ∢δ

Por consecuencia, los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí, es decir, son ángulos congruentes: $\measuredangle\alpha \cong \measuredangle\gamma$ y $\measuredangle\beta \cong \measuredangle\delta$

EJERCICIO **20**

I. Completa los enunciados siguientes.

1. Ángulo que tiene las prolongaciones de sus lados hacia el exterior. _____
2. Ángulo cuya medida está comprendida entre 0° y 90°. _____
3. Ángulo cuya medida está comprendida entre 90° y 180°. _____
4. Ángulo cuya medida está comprendida entre 180° y 360°. _____
5. Ángulos que tienen un lado en común y el mismo vértice. _____

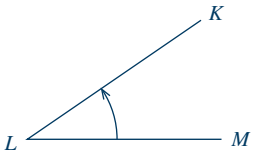
II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

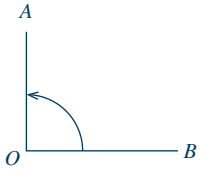
Escribe los números correspondientes

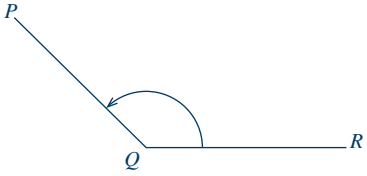
Competencias genéricas

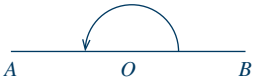
Competencias disciplinares

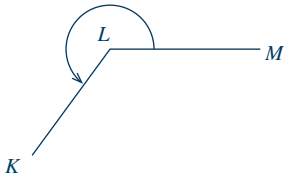
1. Escribe el nombre de los siguientes ángulos.

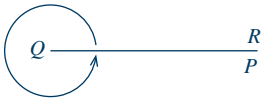


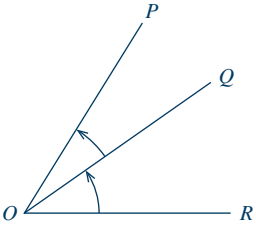


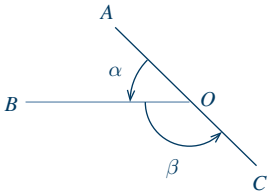


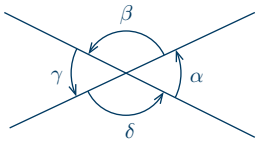












III. En tu cuaderno, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la diferencia entre ángulo convexo y ángulo cóncavo?
2. ¿Cuánto mide un ángulo recto?
3. ¿A qué tipo de ángulo dan lugar dos ángulos rectos?
4. ¿Cuánto mide un ángulo perígono?
5. ¿Qué es un ángulo entrante?
6. Define a los ángulos consecutivos.
7. ¿Qué son los ángulos adyacentes?
8. ¿A qué se denomina ángulos opuestos por el vértice?

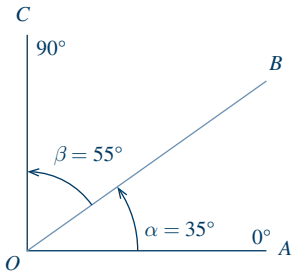
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Ángulos complementarios, suplementarios y conjugados

Ángulos complementarios

Dos ángulos son **complementarios** cuando su suma vale 90°, es decir, cuando forman un ángulo recto.

Complemento de un ángulo. El complemento de un ángulo es igual a la diferencia entre 90° y el ángulo propuesto, ya que $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 90°$.



$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 90°$ $\quad \measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 90°$

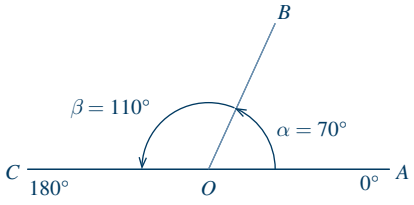
$\therefore$ son complementarios. $\quad 35° + 55° = 90°$

El ángulo α es complemento del ángulo β y viceversa.

Ángulos suplementarios

Dos ángulos son **suplementarios** cuando su suma vale 180°, es decir, cuando forman un ángulo colineal o llano.

Suplemento de un ángulo. El suplemento de un ángulo es igual a la diferencia entre 180° y el ángulo propuesto, ya que $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 180°$.



$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$ $\quad \measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 180°$

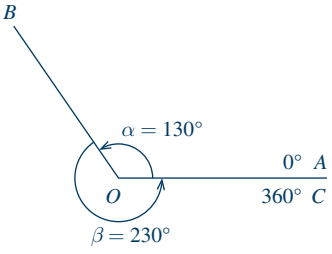
$\therefore$ son suplementarios. $\quad 70° + 110° = 180°$

El ángulo α es suplemento del ángulo β y viceversa.

Ángulos conjugados

Dos ángulos son **conjugados** cuando su suma vale 360°, es decir, cuando forman un ángulo perígono.

Conjugado de un ángulo. El conjugado de un ángulo es igual a la diferencia entre 360° y el ángulo propuesto, ya que $\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 360°$.



$\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 360°$ $\quad \measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 360°$

$\therefore$ son conjugados. $\quad 130° + 230° = 360°$

El ángulo α es conjugado del ángulo β y viceversa.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●●• Encuentra el complemento del ángulo $\alpha = 22°$.

$$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 90°$$
$$22° + \measuredangle\beta = 90°$$
$$\measuredangle\beta = 90° - 22° \qquad \therefore \quad \measuredangle\beta = 68°$$

2 ●●• Determina el complemento del ángulo $\beta = 38°53'16''$.

$$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 90°$$
$$\measuredangle\alpha + 38°53'16'' = 89°59'60''$$
$$\measuredangle\alpha = 89°59'60'' - 38°53'16'' \qquad \therefore \quad \measuredangle\alpha = 51°06'44''$$

3 ●●• Encuentra el suplemento del ángulo α, si $\measuredangle\beta = 1$.

$$\measuredangle\alpha + \measuredangle\beta = 180°$$
$$\measuredangle\alpha + 128°45' = 179°60'$$
$$\measuredangle\alpha = 179°60' - 128°45' \qquad \therefore \quad \measuredangle\alpha = 51°15'$$

4 ●●• Si $\measuredangle\alpha = 168°32'27''$, determina su conjugado.

$$\measuredangle\alpha + \measuredangle\ \beta = 360°$$
$$168°32'27'' + \measuredangle\beta = 359°59'60''$$
$$\measuredangle\beta = 359°59'60'' - 168°32'27'' \qquad \therefore \quad \measuredangle\beta = 191°27'33''$$

EJERCICIO 21

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué son los ángulos complementarios?
2. ¿Cuánto suman los ángulos suplementarios?
3. ¿Qué son los ángulos conjugados?

II. Resuelve los siguientes problemas.

1. Determina el complementario de los siguientes ángulos.

a) 23°

b) 44°29′

c) 39°15′42″

d) 17°38′54″

e) 52°

f) 67°42′

2. Encuentra el suplementario de los siguientes ángulos.

a) 92°

b) 78°49′26″

c) 109°18′21″

d) 133°02′54″

e) 87°29′

f) 156°37′

3. Calcula el conjugado de los siguientes ángulos:

a) 186°

b) 217°45′

c) 249°37′28″

d) 303°52′46″

e) 150°44′16″

f) 132°12′

4. Determina en cada caso.

a) ¿Qué ángulo es igual a su complementario?

b) ¿Qué ángulo es igual a su suplementario?

c) ¿Qué ángulo es igual a su conjugado?

5. Contesta para cada caso.

a) Determina que ángulo es igual a la mitad de su complementario.

b) Determina que ángulo es igual a la mitad de su suplementario.

c) Determina que ángulo es igual a la mitad de su conjugado.

6. Responde para cada caso.

   a) ¿Qué ángulo es igual al doble de su complementario?

   b) ¿Qué ángulo es igual al doble de su suplementario?

   c) ¿Qué ángulo es igual al doble de su conjugado?

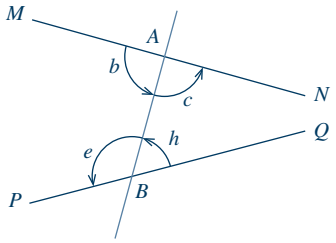
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Ángulos que determinan dos rectas cortadas por una transversal (secante)

Sean dos rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ que son cortadas por una transversal llamada **secante** formando ocho ángulos; en cada punto de intersección cuatro ángulos, los cuales reciben nombres específicos.

Ángulos interiores o internos

Se llaman ángulos interiores a los que pertenecen al semiplano de $\overleftrightarrow{MN}$ que contiene el punto A y el semiplano de $\overleftrightarrow{PQ}$ que contiene el punto B; en la figura son ángulos interiores b, c, e, h.



Los ángulos interiores se clasifican en:

Alternos internos. Son los pares de ángulos internos, no adyacentes, que pertenecen a distintos semiplanos de los que limita la recta transversal o secante.

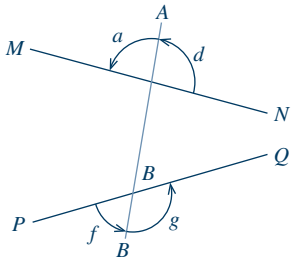
$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle h \\ \sphericalangle c \text{ y } \sphericalangle e \end{array}\right\} \text{ son pares de ángulos alternos internos.}$$

Colaterales internos. Son los pares de ángulos internos situados en el mismo semiplano con respecto a la transversal o secante.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle e \\ \sphericalangle c \text{ y } \sphericalangle h \end{array}\right\} \text{ son pares de ángulos colaterales internos.}$$

Ángulos exteriores o externos

Se llama así a los ángulos no interiores, es decir, los que no pertenecen al semiplano $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ que contienen los puntos A y B, respectivamente; en la figura son a, d, f, g.



Los ángulos exteriores se clasifican en:

Alternos externos. Son los pares de ángulos no adyacentes situados en diferentes semiplanos con respecto a la transversal o secante.

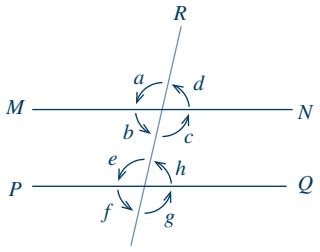
$$\left.\begin{matrix}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle g \\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle f\end{matrix}\right\} \text{ son pares de ángulos alternos externos.}$$

Colaterales externos. Son los pares de ángulos situados en el mismo semiplano con respecto a la transversal o secante.

$$\left.\begin{matrix}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle f \\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle g\end{matrix}\right\} \text{ son pares de ángulos colaterales externos.}$$

Ángulos correspondientes

Son los pares de ángulos uno interno y el otro externo que se encuentran en un mismo semiplano con respecto a la transversal o secante.



$$\left.\begin{matrix}\measuredangle a \text{ y } \measuredangle e \\ \measuredangle b \text{ y } \measuredangle f\end{matrix}\right\} \text{ son pares de ángulos correspondientes } \left\{\begin{matrix}\measuredangle d \text{ y } \measuredangle h \\ \measuredangle c \text{ y } \measuredangle g\end{matrix}\right.$$

Cuando las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ son paralelas, cortadas por la transversal o secante R, los ocho ángulos que se forman dan lugar al siguiente postulado:

Toda secante forma con dos paralelas ángulos correspondientes iguales $\therefore$ hay congruencia.

EJERCICIO 22

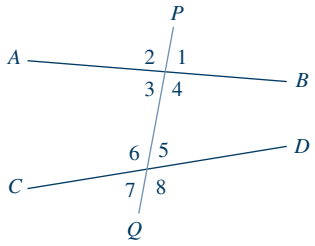
I. Contesta las siguientes preguntas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Dada la siguiente figura, determina los pares de ángulos.



a) Ángulos alternos internos _____

b) Ángulos alternos externos _____

c) Ángulos colaterales internos _____

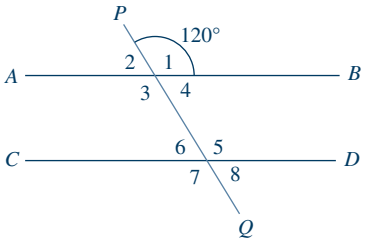
d) Ángulos colaterales externos _____

e) Ángulos correspondientes _____

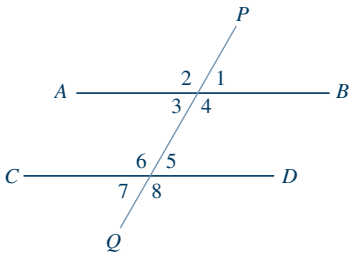
2. Los ángulos correspondientes que dos paralelas forman con una secante son:

_____

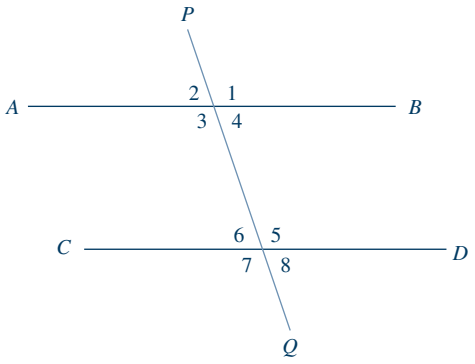
3. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ es una secante, en donde el $\measuredangle 1 = 120°$, encuentra los otros ángulos.



4. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ es una secante, en donde el $\measuredangle 8 = \dfrac{\measuredangle 7}{2}$, encuentra los otros ángulos.



5. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ es una secante, en donde el $\measuredangle 1 = 7x$, $\measuredangle 6 = 3x$, determina los otros ángulos.

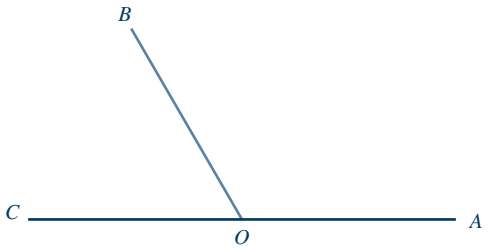


Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Demostración de teoremas sobre ángulos

Teorema I

Dos ángulos adyacentes son suplementarios.



Hipótesis: $\measuredangle AOB$ y $\measuredangle BOC$ son ángulos adyacentes (como se ve en la figura anterior).

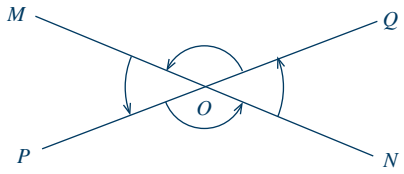
Tesis: $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$

Demostración: (1) $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = \measuredangle AOC$ (Por suma de ángulos)
(2) $\measuredangle AOC = 180°$ (Por ser un ángulo colineal o llano)

Conclusión: $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 180°$, de acuerdo con el axioma que establece que **dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí** (carácter transitivo de la igualdad).

Teorema 2

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.



Hipótesis: $\measuredangle MOP$ y $\measuredangle NOQ$ son opuestos por el vértice (como se muestra en la figura anterior).

Tesis: $\measuredangle MOP$ y $\measuredangle NOQ$

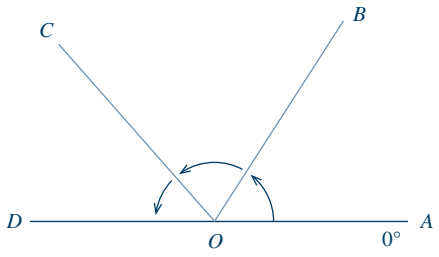
Demostración: (1) $\measuredangle MOP$ y $\measuredangle MOQ = 180°$ por ser adyacentes
transponiendo,
$\measuredangle MOQ$: $\measuredangle MOP = 180° - \measuredangle MOQ$.
(2) $\measuredangle NOQ + \measuredangle MOQ = 180°$ por ser adyacentes
transponiendo,
$\measuredangle MOQ$: $\measuredangle NOQ = 180° - \measuredangle MOQ$
(3) Comparando las igualdades: $\measuredangle MOP = 180° - \measuredangle MOQ$ y $\measuredangle NOQ = 180° - \measuredangle MOQ$

Conclusión: $\measuredangle MOP = \measuredangle NOQ$ por el carácter transitivo de la igualdad.

Análogamente se demuestra que $\measuredangle MOQ = \measuredangle NOP$.

Teorema 3

Los ángulos consecutivos formados a un lado de una recta suman 180°.



Hipótesis: $\measuredangle AOB$, $\measuredangle BOC$, $\measuredangle COD$ son ángulos consecutivos formados a un lado de la recta $\overleftrightarrow{AD}$.

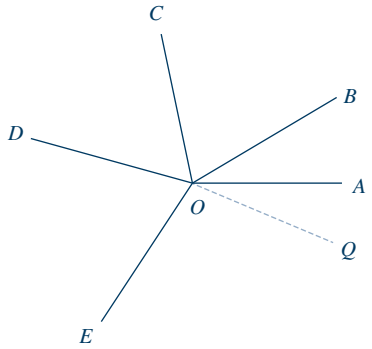
Tesis: $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COD = 180°$

Demostración: (1) $\measuredangle AOB + \measuredangle BOD = \measuredangle 180°$ por ser ángulos adyacentes, pero:
(2) $\measuredangle BOD = \measuredangle BOC + \measuredangle COD$ suma de ángulos.
(3) Sustituyendo $\measuredangle BOD = \measuredangle BOC + \measuredangle COD$ en $\measuredangle AOB + \measuredangle BOD = 180°$ se tiene que:

Conclusión: $\measuredangle AOB + \measuredangle BOC + \measuredangle COD = 180°$

Teorema 4

La suma de los ángulos consecutivos alrededor de un punto vale 360°.



Hipótesis: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ y $\sphericalangle EOA$ son ángulos consecutivos alrededor del punto O.

Tesis: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360°$

Construcción auxiliar: Prolongación de un lado cualquiera, por ejemplo $\overleftrightarrow{OQ}$, de manera que el $\sphericalangle EOA$ quede dividido en $\sphericalangle EOQ$ y $\sphericalangle QOA$, tales que $\sphericalangle EOQ + \sphericalangle QOA = \sphericalangle EOA$.

Demostración: (1) $\sphericalangle QOA + \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180°$ por ser ángulos consecutivos formados a un lado de la recta $\overleftrightarrow{DQ}$.

(2) $\sphericalangle DOE + \sphericalangle EOQ = 180°$, por la misma razón anterior.

(3) Sumando los miembros de las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOQ + \sphericalangle QOA = 180° + 180°$

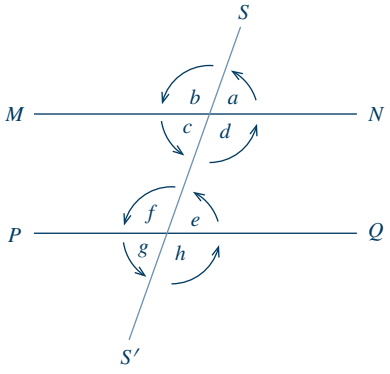
(4) $\sphericalangle EOQ + \sphericalangle QOA = \sphericalangle EOA$, por suma de ángulos.

(5) Sustituyendo (4) en (3), tenemos:

Conclusión: $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD + \sphericalangle DOE + \sphericalangle EOA = 360°$

Teorema 5

Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos internos iguales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante que al cortar las paralelas forma los siguientes pares de ángulos alternos internos:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle c \text{ y } \sphericalangle e \\ \sphericalangle d \text{ y } \sphericalangle f \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Pares de ángulos} \\ \text{alternos internos.} \end{array}$$

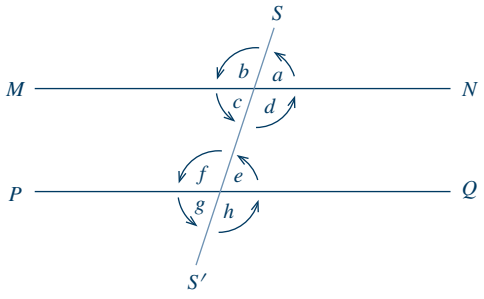
Tesis: $\sphericalangle c = \sphericalangle e$ y $\sphericalangle d = \sphericalangle f$

Demostración: (1) $\sphericalangle c = \sphericalangle a$, por ser opuestos por el vértice.
(2) $\sphericalangle a = \sphericalangle e$, por ser ángulos correspondientes.

Conclusión: $\sphericalangle c = \sphericalangle e$, aplicando el carácter transitivo de la igualdad. Por las mismas razones se demuestra que $\sphericalangle d = \sphericalangle f$.

Teorema 6

Toda secante forma con dos paralelas ángulos alternos externos iguales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante que al cortar las paralelas forma los siguientes pares de ángulos alternos externos:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle a \text{ y } \sphericalangle g \\ \sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle h \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Pares de ángulos} \\ \text{alternos externos.} \end{array}$$

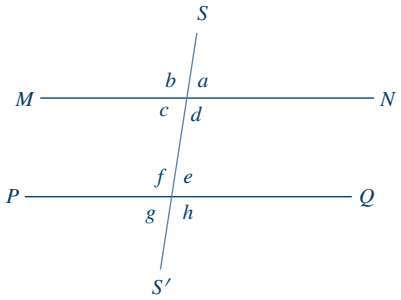
Tesis: $\sphericalangle a = \sphericalangle g$ y $\sphericalangle b = \sphericalangle h$

Demostración: (l) El $\sphericalangle a = \sphericalangle c$, por ser opuestos por el vértice.
(2) El $\sphericalangle c = \sphericalangle g$, por ser ángulos correspondientes.

Conclusión: $\sphericalangle a = \sphericalangle g$, aplicando el carácter transitivo de la igualdad. Por las mismas razones se demuestra que $\sphericalangle b = \sphericalangle h$.

Teorema 7

Dos ángulos conjugados internos, entre paralelas, son suplementarios.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una **secante** que al cortar las paralelas forma los siguientes pares de ángulos conjugados internos:

$\left.\begin{array}{l} \measuredangle c \text{ y } \measuredangle f \\ \measuredangle d \text{ y } \measuredangle e \end{array}\right\}$ Pares de ángulos conjugados internos

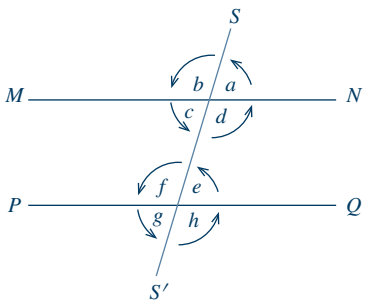
Tesis: $\measuredangle c + \measuredangle f = 180°$; $\measuredangle d + \measuredangle e = 180°$

Demostración: (1) $\measuredangle e + \measuredangle f = 180°$, por ser ángulos adyacentes.
(2) $\measuredangle e = \measuredangle c$, por ser ángulos alternos internos.

Conclusión: Sustituyendo (2) en (1), tenemos que: $\measuredangle c + \measuredangle f = 180°$, aplicando el axioma de que una expresión se puede sustituir por otra igual en cualquier operación algebraica. Por las mismas razones se demuestra que $\measuredangle d + \measuredangle e = 180°$.

Teorema 8

Los ángulos conjugados externos, entre paralelas, son suplementarios.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$; $\overleftrightarrow{SS'}$ es una secante que al cortar las paralelas forma los siguientes pares de ángulos conjugados externos:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle a \text{ y } \sphericalangle h \\ \sphericalangle b \text{ y } \sphericalangle g \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Pares de ángulos} \\ \text{conjugados externos.} \end{array}$$

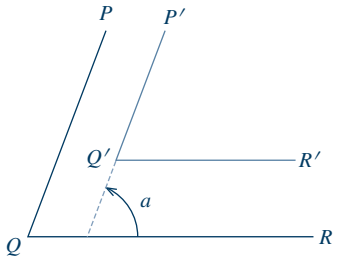
Tesis: $\sphericalangle a + \sphericalangle h = 180°$; $\sphericalangle b + \sphericalangle g = 180°$

Demostración: (1) $\sphericalangle g + \sphericalangle h = 180°$, por ser ángulos adyacentes.
(2) $\sphericalangle g = \sphericalangle a$, por ser ángulos alternos externos.

Conclusión: Sustituyendo (2) en (1), tenemos que $\sphericalangle a + \sphericalangle h = 180°$. Aplicando el axioma de que una expresión se puede sustituir por otra igual en cualquier operación algebraica. Por las mismas razones se demuestra que $\sphericalangle b + \sphericalangle g = 180°$.

Teorema 9

Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{OR} \parallel \overleftrightarrow{Q'R'}$; $\overleftrightarrow{QP} \parallel Q'P'$; los $\sphericalangle PQR$ y $\sphericalangle P'Q'R'$ tienen sus lados dirigidos en el mismo sentido.

Tesis: $\sphericalangle PQR = \sphericalangle P'Q'R'$

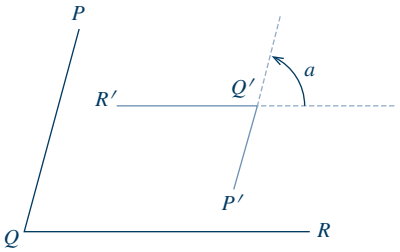
Construcción auxiliar: Se prolonga el lado $\overrightarrow{P'Q'}$ hasta que corte al lado $\overrightarrow{QR}$ dando lugar al $\sphericalangle a$.

Demostración: (1) $\sphericalangle PQR = \sphericalangle a$, por ser ángulos correspondientes.
(2) $\sphericalangle P'Q'R' = \sphericalangle a$, por ser ángulos correspondientes.

Conclusión: $\sphericalangle PQR = \sphericalangle P'Q'R'$, aplicando el carácter transitivo de la igualdad.

Teorema 10

Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en sentido contrario, son iguales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{Q'R'}$; $\overleftrightarrow{QP} \parallel \overleftrightarrow{P'Q'}$, los $\measuredangle PQR$ y $\measuredangle P'Q'R'$ tienen sus lados dirigidos en sentido contrario.

Tesis: $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$

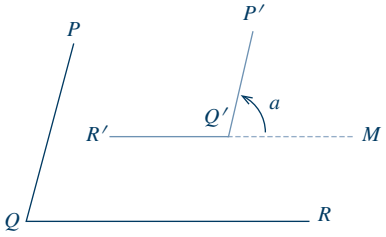
Construcción auxiliar: Prolongando los lados $\overrightarrow{Q'R'}$ y $\overrightarrow{P'Q'}$ para formar el $\measuredangle a$.

Demostración: (1) $\measuredangle PQR = \measuredangle a$, por tener lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.
(2) $\measuredangle P'Q'R' = \measuredangle a$, por ser ángulos opuestos por el vértice.

Conclusión: $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$, aplicando el carácter transitivo de la igualdad.

Teorema 11

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, dos de ellos dirigidos en el mismo sentido, y los otros dos en sentido contrario, dichos ángulos son suplementarios.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{Q'R'}$ y en sentido contrario; $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{P'Q'}$ y en el mismo sentido.

Tesis: $\measuredangle PQR + \measuredangle P'Q'R' = 180°$

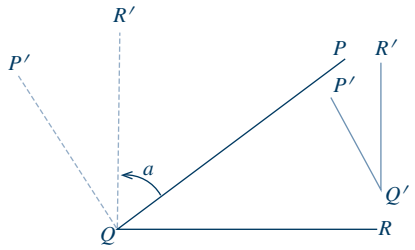
Construcción auxiliar: Prolongando $\overrightarrow{Q'R'}$ se forma el $\measuredangle a$.

Demostración: (1) $\measuredangle P'Q'R' + \measuredangle a = 180°$, por ser ángulos adyacentes.
(2) $\measuredangle a = \measuredangle PQR$, por tener lados paralelos y del mismo sentido.

Conclusión: Sustituyendo (2) en (1) tenemos: $\measuredangle PQR + \measuredangle P'Q'R' = 180°$, aplicando el axioma de que una expresión se puede sustituir por otra igual en cualquier operación algebraica.

Teorema 12

Dos ángulos agudos cuyos lados son respectivamente perpendiculares son iguales.



Hipótesis: $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{Q'R'}$; $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{Q'P'}$; $\measuredangle PQR < 90°$; $\measuredangle P'Q'R' < 90°$

Tesis: $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$

Construcción auxiliar: Trazando por Q la semirrecta $\overrightarrow{QP''}$ paralela a la semirrecta $\overrightarrow{Q'P'}$ y $\overrightarrow{QP''} \parallel \overrightarrow{Q'P'}$ de manera que el $\measuredangle P''QR'' = \measuredangle P'Q'R'$, por tener lados paralelos y del mismo sentido, además se forma el $\measuredangle a$.

Demostración: (1) $\measuredangle R''QP'' + \measuredangle a = 90°$, por ser $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{Q'P}$ y $\overrightarrow{QP''} \parallel \overrightarrow{Q'P'}$, según el corolario que establece que si una recta es perpendicular a otra, es también perpendicular a toda paralela a esta otra; es decir, $\overrightarrow{QP} \perp \overrightarrow{QP''}$. Transponiendo en la ecuación inicial, tenemos $\measuredangle P''QR'' = 90° - \measuredangle a$.

(2) $\measuredangle PQR + \measuredangle a = 90°$, por ser $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{Q'R'}$ y $\overrightarrow{QR''} \parallel \overrightarrow{Q'R}$, es, según el corolario que establece: que si una recta es perpendicular a otra, es también perpendicular a toda paralela a esta otra; es decir, $QR'' \parallel QR$. Transponiendo en la ecuación inicial, tenemos: $\measuredangle PQR = 90° - \measuredangle a$.

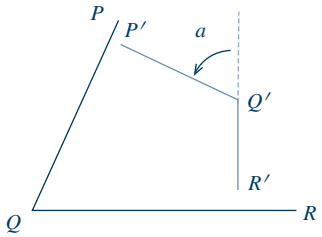
(3) Comparando (1) y (2), tenemos: $\measuredangle P''QR'' = \measuredangle PQR$, aplicando el carácter transitivo de la igualdad.

(4) Como $\measuredangle P''QR'' = \measuredangle P'Q'R'$, por ser lados paralelos en el mismo sentido.

Conclusión: Sustituyendo (4) en (3), tenemos $\measuredangle P'Q'R' = \measuredangle PQR$.

Teorema 13

Dos ángulos, uno agudo y otro obtuso, que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{Q'R'} \perp \overleftrightarrow{QR}$; $\overleftrightarrow{Q'P'} \perp \overleftrightarrow{QP}$; $\measuredangle PQR < 90°; \measuredangle P'Q'R' > 90°$

Tesis: $\measuredangle PQR + \measuredangle P'Q'R' = 180°$

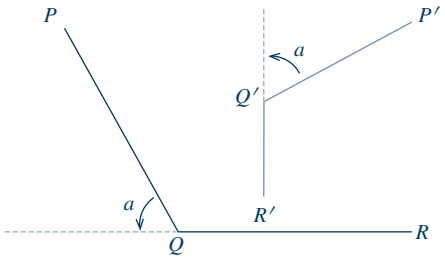
Construcción auxiliar: Prolongación de $\overleftrightarrow{R'Q'}$ hasta que se forme el $\measuredangle a$.

Demostración: (1) $\measuredangle PQR = \measuredangle a$, por tener lados perpendiculares y ser ambos ángulos agudos.
(2) $\measuredangle P'Q'R' + \measuredangle a = 180°$, por ser ángulos adyacentes.

Conclusión: Haciendo la sustitución de (1) en (2) resulta $\measuredangle P'Q'R' + \measuredangle PQR = 180°$.

Teorema 14

Dos ángulos obtusos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{Q'R'} \perp \overleftrightarrow{QR}$; $\overleftrightarrow{Q'P'} \perp \overleftrightarrow{QP}$; $\measuredangle PQR > 90°; \measuredangle P'Q'R' > 90°$

Tesis: $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$

Construcción auxiliar: Prolongando $\overleftrightarrow{RQ}$ y $\overleftrightarrow{R'Q'}$ se forman los $\measuredangle a$ y $\measuredangle a'$, que son iguales por ser agudos y tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Demostración: (1) $\measuredangle PQR + \measuredangle a = 180°$, por ser ángulos adyacentes; transponiendo: $\measuredangle PQR = 180° - \measuredangle a$.
(2) $\measuredangle P'Q'R' + \measuredangle a' = 180°$, por ser ángulos adyacentes; transponiendo: $\measuredangle P'Q'R' = 180° - \measuredangle a$.
(3) $\measuredangle a' = \measuredangle a$, por ser ángulos agudos y tener lados perpendiculares.
(4) Haciendo la sustitución de (3) en (2), tenemos $\measuredangle P'Q'R' = 180° - \measuredangle a$.

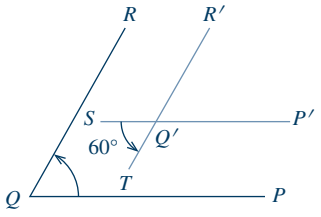
Conclusión: Comparando (4) y (1) y aplicando el carácter transitivo, tenemos $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$.

EJERCICIO 23

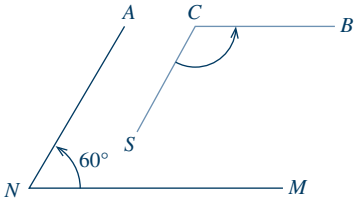
I. En equipo, resuelvan los siguientes problemas aplicando la demostración de teoremas sobre ángulos y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

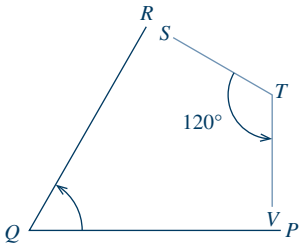
1. Si $\overleftrightarrow{RQ} \parallel \overleftrightarrow{R'Q'}$; $\overleftrightarrow{QR} \parallel \overleftrightarrow{Q'R'}$; si $\measuredangle TQ'S = 60°$, encuentra $\measuredangle PQR$.



2. Si $\overleftrightarrow{AN} \parallel \overleftrightarrow{CS}$; $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{CB}$; si $\measuredangle MNA = 60°$, determina $\measuredangle BCS$.



3. Si $\overline{TV} \perp \overline{PQ}, \overline{ST} \perp \overline{QR}$; si $\measuredangle STV = 120°$, encuentra $\measuredangle PQR$.



Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿A cuántos grados, minutos y segundos sexagesimales equivalen $54° 856''$?

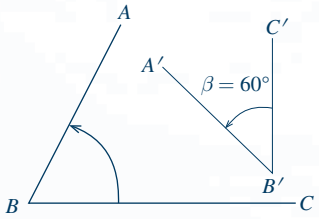
2. Expresa $256°39'18''$ en radianes.

3. Traza un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ radianes.

4. Determina el ángulo complementario del ángulo $16°59'25''$.

5. Aplica la demostración de teoremas sobre ángulos para resolver el siguiente problema.

   Si $\overline{BC} \perp \overline{B'C'}$; $\overline{BA} \perp \overline{B'A'}$; si $\sphericalangle ABC$, encuentra .



Unidad 4

Triángulos

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Cuál es la diferencia entre un triángulo isósceles y un escaleno?

2. Los puntos notables de un triángulo se clasifican en:

3. Enuncia el teorema de Pitágoras.

4. ¿Cómo se expresa matemáticamente el área de un triángulo?

5. ¿Para qué se utiliza la fórmula de Herón y en qué términos?

Triángulos

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición, notación y clasificación de triángulos.
- Identifique las rectas y puntos notables del triángulo.
- Conozca los teoremas para ángulos internos y externos de un triángulo.
- Identifique la congruencia de triángulos.
- Defina el teorema de Tales y sus aplicaciones.
- Identifique la semejanza de triángulos.
- Conozca el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.
- Calcule el área, perímetro y semiperímetro del triángulo.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos con situaciones reales.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Definición, notación y clasificación de triángulos.
- Rectas y puntos notables del triángulo.
- Teorema para ángulos internos y externos de un triángulo.
- Igualdad o congruencia de triángulos.
- Teorema de Tales y sus aplicaciones.
- Semejanza de triángulos.
- Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.
- Área, perímetro y semiperímetro de triángulos.

Contenidos procedimentales

- Notará las diferencias entre los diferentes triángulos.
- Identificará los principales puntos y rectas notables del triángulo
- Resolverá y problemas con base a los teoremas aprendidos.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos básicos de la geometría.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

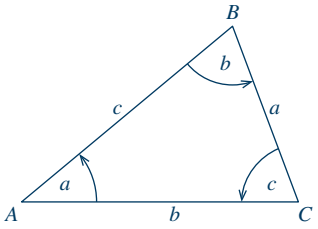
Definición, notación y clasificación de triángulos

Definición de triángulo

Es una figura cerrada o polígono formada por tres rectas que se cortan dos a dos en tres puntos (no colineales); es el polígono o figura geométrica formada por tres lados que a su vez forman entre sí tres ángulos. Por tal razón el triángulo es un subconjunto de los polígonos.

Vértices: A, B y C.

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ o c, a y b, respectivamente.



Ángulos internos: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ o $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle c$.

Notación: $\triangle ABC$

Los puntos de intersección son los vértices del triángulo ABC.

Cada uno de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son los lados del triángulo, que por lo general se designa con una letra minúscula e igual a la del vértice opuesto; así, el lado $\overline{AB}$ se denomina c, ya que el vértice C es el opuesto a dicho lado $\overline{BC} = a$ y $\overline{AC} = b$.

Los lados forman los ángulos internos que se designan por las letras de los vértices o por minúsculas de los mismos.

$\therefore$ Un triángulo tiene 3 ángulos, 3 lados y 3 vértices.

Notación de triángulos

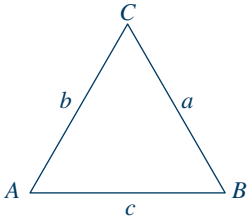
La manera más común de nombrar a los triángulos es colocar las letras de los vértices (mayúsculas) en seguida del símbolo $\triangle$. De la figura anterior: $\triangle ABC$.

Clasificación de los triángulos

Los triángulos se clasifican, de acuerdo a la longitud de sus lados y de acuerdo a la magnitud de sus ángulos.

Clasificación de acuerdo a sus lados

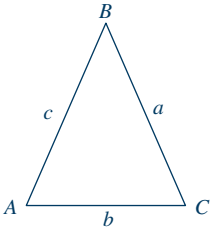
Equiláteros. **Son los que tienen sus tres lados iguales.**



$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ o $c = a = b$

$\therefore$ $\triangle ABC$, es un triángulo equilátero.

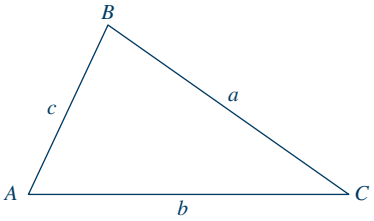
Isósceles. Son los que tienen dos lados iguales.



$\overline{AB} = \overline{BC} \neq \overline{AC}$ o $c = a \neq b$

$\therefore$ $\triangle ABC$ es un triángulo isósceles.

Escalenos. Son los que tienen sus tres lados desiguales.

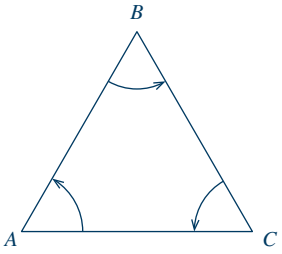


$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{AC}$ o $c \neq a \neq b$

$\therefore$ $\triangle ABC$ es un triángulo escaleno.

Clasificación de acuerdo a sus ángulos

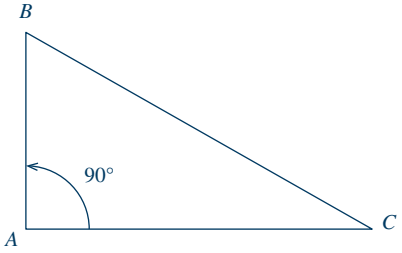
Acutángulos. Son los que tienen sus tres ángulos internos agudos.



$\measuredangle A,\ \measuredangle B$ y $\measuredangle C < 90°$

$\therefore$ $\measuredangle A,\ \measuredangle B$ y $\measuredangle C$ son ángulos agudos.

Rectángulos. Son los que tienen un ángulo recto, los lados que forman el ángulo recto se denominan **catetos** y el lado opuesto se llama **hipotenusa**.

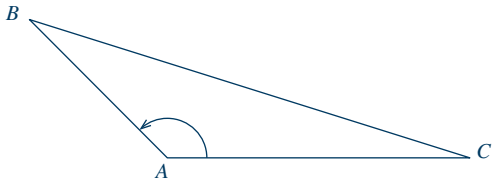


$\measuredangle A = 90°$

$\therefore$ $\measuredangle A$ es un ángulo recto $\measuredangle B$ y $\measuredangle C < 90°$

$\therefore$ $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ son ángulos agudos.
$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son los catetos.
$\overline{BC}$ es la hipotenusa.

Obtusángulos. **Son los que tienen un ángulo obtuso.**



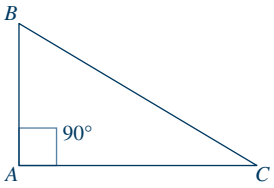
$\sphericalangle A > 90°$

$\therefore$ $\sphericalangle A$ es un ángulo obtuso $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C < 90°$

$\therefore$ $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ son ángulos agudos.

Los triángulos acutángulos y obtusángulos se denominan también **triángulos oblicuángulos** debido a que ninguno de sus ángulos internos es un ángulo recto.

El ángulo recto se señala por medio de un cuadrado en el vértice.



EJERCICIO **24**

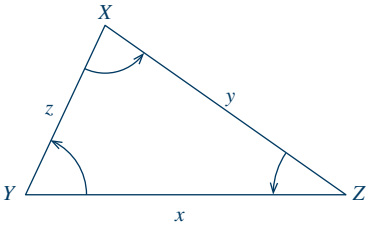
I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. Define triángulo.
2. ¿Qué elementos forman un triángulo?
3. ¿Cuál es la notación de triángulo?
4. Cita la clasificación de los triángulos de acuerdo al número de lados y ángulos.
5. Menciona una característica del triángulo isósceles.
6. Enuncia una característica del triángulo acutángulo.
7. Menciona una característica del triángulo escaleno.
8. Enuncia una característica del triángulo obtusángulo.
9. ¿Qué otro nombre identifica a los triángulos acutángulos y obtusángulos?
10. ¿Cuál es la notación del ángulo recto en el triángulo?

II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

1. Identifica los elementos y su notación del siguiente triángulo.



2. Clasifica y representa gráficamente el tipo de triángulos de acuerdo al número de lados.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Rectas y puntos notables del triángulo

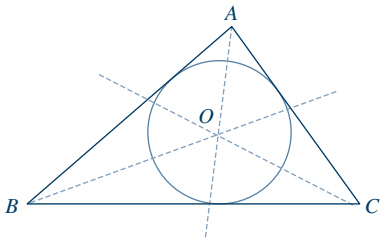
Los puntos notables de un triángulo son los puntos de intersección de las rectas notables, se clasifican en: bisectrices, mediatrices, alturas y medianos de un triángulo.

Incentro

Es el punto de intersección de las **bisectrices** de los ángulos interiores del triángulo; es decir, el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo cuyos lados son tangentes a la circunferencia.

Bisectriz del ángulo

Es la semirrecta interior al ángulo que lo divide en dos partes o ángulos iguales.



$\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{CO}$ = Bisectrices

$\overline{AO} \cap \overline{BO} \cap \overline{CO} = 0$

O es el incentro.

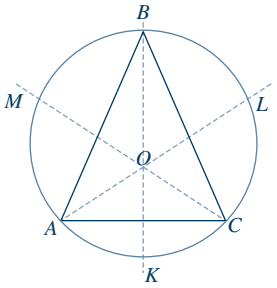
En cualquier triángulo el incentro es interior al triángulo.

Circuncentro

Es el punto de intersección de las **mediatrices** de los lados del triángulo, además es el centro de la circunferencia circunscrita.

Mediatriz

Es la recta perpendicular que corta el punto medio de un segmento al trazar un círculo centrado en el circuncentro y de radio igual a la magnitud del segmento $\overline{OB}$, se observa que dicho círculo es circunscrito al triángulo.

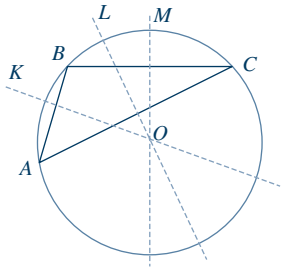


Es un triángulo acutángulo el circuncentro es interior al triángulo.

$\overline{KO}$, $\overline{LO}$ y $\overline{MO}$ = Mediatrices

$\overline{KO} \cap \overline{LO} \cap \overline{MO} = 0$

O es el circuncentro.



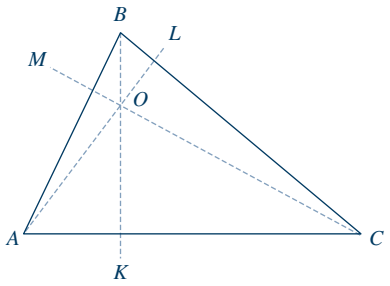
En un triángulo rectángulo u obtusángulo el circuncentro es exterior al triángulo.

Ortocentro

Es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo.

Altura del triángulo

Es el segmento de recta trazado desde un vértice perpendicularmente al lado opuesto.



En el triángulo acutángulo el ortocentro es interior al triángulo.

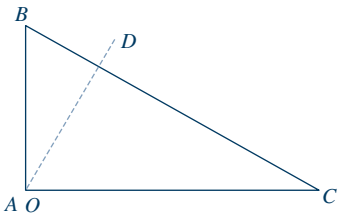
$\overline{AL} \perp \overline{BC}$

$\overline{BK} \perp \overline{AC}$

$\overline{CM} \perp \overline{AB}$

$\overline{AL}$, $\overline{BK}$ y $\overline{CM}$ = Alturas

$\overline{AL} \cap \overline{BK} \cap \overline{CM} = 0$



$\overline{AB} \perp \overline{AC}$

$\overline{AC} \perp \overline{AB}$

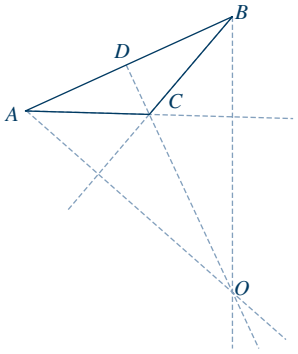
$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ = Alturas

$\overline{AB} \cap \overline{AC} \cap \overline{AD} = 0$

O es el ortocentro.

En el triángulo rectángulo el ortocentro coincide con el vértice del ángulo recto.



$\overline{AO} \perp \overline{BC}$

$\overline{BO} \perp \overline{AC}$

$\overline{DO} \perp \overline{AB}$

$\overline{AO}$, $\overline{BO}$ y $\overline{DO}$ = Alturas

$\overline{AO} \cap \overline{BO} \cap \overline{DO} = 0$

O es el ortocentro.

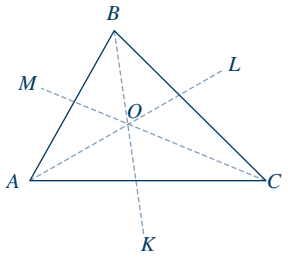
En el triángulo obtusángulo el ortocentro es exterior al triángulo y es el punto de intersección de las prolongaciones de las alturas.

Gravicentro, baricentro o centro de gravedad

Es el punto de intersección de las **medianas** de un triángulo.

Mediana

Es el segmento trazado de un vértice al punto medio del lado opuesto. El gravicentro siempre es interior al triángulo.



$\overline{AL}$, $\overline{BK}$ y $\overline{CM}$ = Medianas

$\overline{AL} \cap \overline{BK} \cap \overline{CM} = O$

O es el gravicentro.

EJERCICIO 25

I. Escribe dentro del paréntesis el número que corresponde a la respuesta correcta, tomándolo de la lista de la derecha:

( ) Intersección de las bisectrices de los ángulos interiores del triángulo.

( ) Intersección de las mediatrices de los lados del triángulo.

( ) Intersección de las tres alturas del triángulo.

( ) Intersección de las medianas de los lados del triángulo.

( ) Perpendicular que corta el punto medio de un segmento.

( ) Segmento de recta trazado desde un vértice perpendicular al lado opuesto.

( ) Segmento trazado de un vértice al punto medio del lado opuesto.

1. Altura del triángulo
2. Mediana
3. Incentro
4. Bisectriz
5. Ortocentro
6. Mediatriz
7. Circuncentro
8. Gravicentro

II. Contesta las siguientes preguntas.

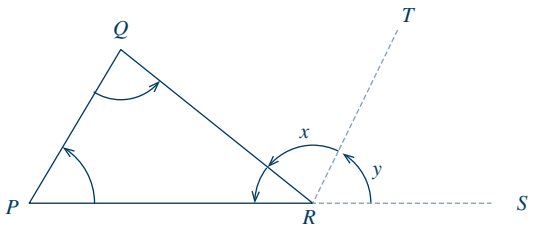
1. ¿Cuál es la ubicación del circuncentro en el triángulo rectángulo u obtusángulo?
2. ¿Cuál es la ubicación del ortocentro en un triángulo rectángulo?
3. ¿Cuál es la ubicación del incentro en cualquier triángulo?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Teoremas para ángulos internos y externos de un triángulo

Teorema para ángulos internos de un triángulo

Los ángulos internos de cualquier triángulo suman dos ángulos rectos (180°).



Hipótesis: $\measuredangle p$, $\measuredangle q$ y $\measuredangle r$ son los ángulos internos del $\triangle PQR$.

Tesis: $\measuredangle p + \measuredangle q < \measuredangle r = 180°$.

Construcción auxiliar: Por el vértice R se traza $\overline{RT} \parallel \overline{PQ}$ formando el ángulo x y $\overline{RS}$, prolongación de PR, forma el ángulo y.

Demostración: (1) $\measuredangle r + \measuredangle x + \measuredangle y = 180°$, por ser ángulos consecutivos y formar un ángulo colineal o llano.

(2) $\measuredangle y = \measuredangle p$, por ser ángulos correspondientes.

(3) $\measuredangle x = \measuredangle q$, por ser ángulos alternos internos.

(4) Sustituyendo (2) y (3) en (1), tenemos que: $\measuredangle r + \measuredangle q + \measuredangle p = 180°$, por el axioma: **todo valor puede ser sustituido por su igual**.

Conclusión: $\measuredangle p + \measuredangle q + \measuredangle r = 180°$.

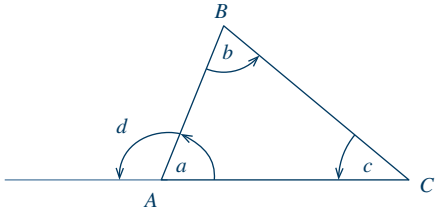
De este teorema se deduce el siguiente corolario.

Corolario

En un triángulo rectángulo sus ángulos agudos suman un ángulo recto (90°). Como el triángulo rectángulo tiene un ángulo recto (90°), los otros dos deberán sumar 90° para cumplir con el teorema anterior. Así mismo se establece: en un triángulo equilátero cada uno de sus ángulos tiene un valor igual a 60°.

Teoremas para ángulos externos de un triángulo

Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.



Hipótesis: En el $\triangle ABC$ sus ángulos internos son $\measuredangle a$, $\measuredangle b$ y $\measuredangle c$; el $\measuredangle d$ es su ángulo externo.

Tesis: $\measuredangle d = \measuredangle b + \measuredangle c$.

Demostración: (1) $\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 180°$, por ser ángulos internos de un triángulo.

(2) $\measuredangle d + \measuredangle a = 180°$, por ser ángulos adyacentes y formar un ángulo colineal o llano.

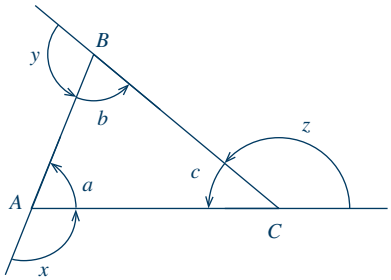
(3) $\measuredangle d + \measuredangle a = \measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c$, por el carácter transitivo de la igualdad.

(4) $\measuredangle d = \measuredangle b + \measuredangle c$, aplicando el axioma: si a cantidades iguales se suman o restan cantidades iguales, los resultados son iguales.

Conclusión: $\measuredangle d = \measuredangle b + \measuredangle c$.

Teorema

La suma de los ángulos externos de cualquier triángulo son cuatro ángulos rectos (360°).



Hipótesis: En el $\triangle ABC$ sus ángulos internos son $\sphericalangle a$, $\sphericalangle b$ y $\sphericalangle c$; sus ángulos externos son $\sphericalangle x$, $\sphericalangle y$ y $\sphericalangle z$.

Tesis: $\sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z = 360°$

Demostración: (l) $\sphericalangle a + \sphericalangle x = 180°$, $\sphericalangle b + \sphericalangle y = 180°$, $\sphericalangle c + \sphericalangle z = 180°$; por ser ángulos adyacentes y formar ángulos colineales o llanos.

(2) $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c + \sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z = 540°$; por el axioma: dos o más igualdades pueden sumarse miembro a miembro.

(3) $\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c = 180°$; por ser ángulos internos de un triángulo.

(4) Sustituyendo (3) en (2), tenemos: $\sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z + 180° = 540°$; aplicando el axioma: un número se puede sustituir por su igual en cualquier operación.

(5) $\sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z = 540° - 180°$, trasponiendo términos independientes,

$$\therefore \quad \sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z = 360°$$

Conclusión: $\sphericalangle x + \sphericalangle y + \sphericalangle z = 360°$.

EJERCICIO **26**

I. En equipo, aplicando los teoremas para ángulos internos y externos de un triángulo, resuelvan los siguientes problemas y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Cuánto vale un ángulo de un triángulo equilátero?

2. Dos ángulos de un triángulo miden 35° y 30°, respectivamente, ¿cuánto mide el tercer ángulo y cada uno de los ángulos externos?

3. Los ángulos en la base de un triángulo isósceles miden 35° cada uno, ¿cuánto mide el ángulo opuesto a la base?

4. Un triángulo isósceles tiene un ángulo de 40° en el vértice, ¿qué ángulos forman las bisectrices de los otros dos ángulos?

5. Si el $\measuredangle z$ es igual a 40° y $\measuredangle TQR$ es recto, da y representa gráficamente los valores de los ángulos: $\measuredangle QPR$, $\measuredangle PRQ$ y $\measuredangle PQR$.

II. Contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

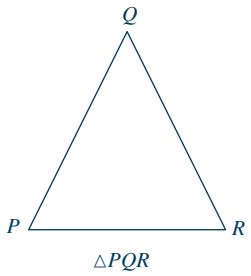
1. Enuncia el teorema para los ángulos internos de un triángulo.
2. ¿Cuánto suman los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?
3. Enuncia el teorema para los ángulos externos de un triángulo.

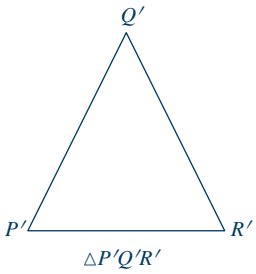
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Igualdad o congruencia de triángulos

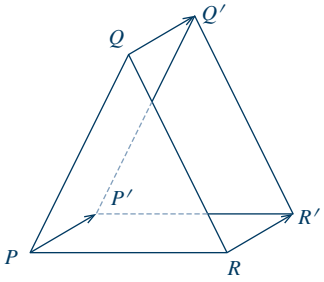
Congruencia de triángulos

Para conocer si dos triángulos son iguales, se aplica el método de **superposición**. Por ejemplo, al llevar el $\triangle PQR$ sobre el $\triangle P'Q'R'$, se observa que cada uno de los vértices del primer triángulo coincide con los del segundo triángulo y que también coinciden sus lados; por lo tanto, hay congruencia entre los dos triángulos superpuestos.





$$\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$$
$$\overline{QR} = \overline{Q'R'}$$
$$\overline{PR} = \overline{P'R'}$$
$$\measuredangle p = \measuredangle p'$$
$$\measuredangle q = \measuredangle q'$$
$$\measuredangle r = \measuredangle r'$$



$\therefore \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$

Un triángulo es congruente cuando sus lados y ángulos de uno son respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro.

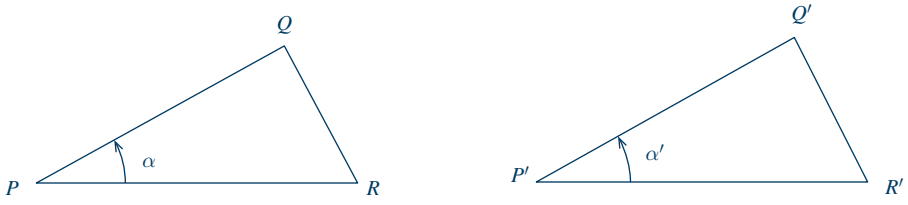
No obstante, para demostrar que dos triángulos son congruentes, no es necesario demostrar la igualdad de los tres lados o de los tres ángulos, ya que la práctica ha comprobado que conociendo únicamente algunos de sus elementos, por lo menos los que se refieren a los lados, necesariamente se cumplen las otras condiciones.

Criterios empleados en la congruencia de triángulos

Como en toda igualdad, la congruencia de triángulos satisface los caracteres de idéntico o reflejo, recíproco o simétrico y transitivo.

De lo anterior se establecen los siguientes criterios sobre la igualdad de triángulos:

1. Dos triángulos son congruentes cuando tienen igual un ángulo y los dos lados que conformaron dicho ángulo.



$$\text{Si } \measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha',\ \overline{PQ} = \overline{P'Q'},\ \overline{PR} = \overline{P'R'} \quad \therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$$

2. Dos triángulos son congruentes cuando tienen dos ángulos iguales y el lado adyacente a ellos.

$$\text{Si } \overline{PR} = \overline{P'R'},\ \measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha', \measuredangle\beta = \measuredangle\beta' \quad \therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$$

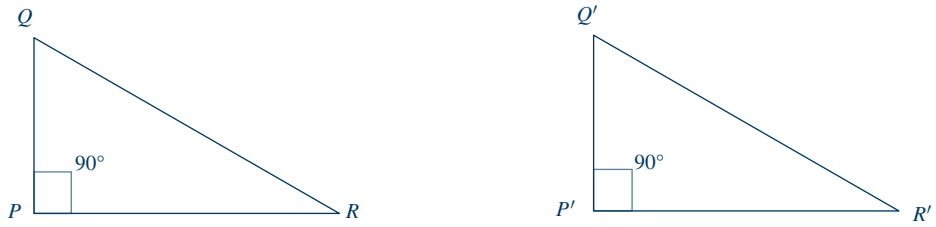
3. Dos triángulos son congruentes cuando tienen respectivamente uno a uno sus tres lados.

$$\text{Si } \overline{PQ} = \overline{P'Q'},\ \overline{QR} = \overline{Q'R'},\ \overline{PR} = \overline{P'R'} \quad \therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$$

Criterios empleados en la congruencia de triángulos rectángulos

Si se trata de dos triángulos rectángulos, los tres criterios anteriores se simplifican, pues los triángulos ya tienen un ángulo igual, por lo que se pueden considerar los siguientes criterios:

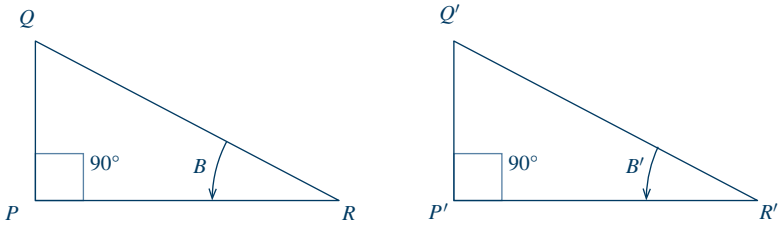
1. Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen iguales los dos catetos.



Si $\overline{PR} = \overline{P'R'}$ y $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ entonces, $\triangle PQR$ es igual a $\triangle P'Q'R'$ por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido, ya que $\measuredangle p = \measuredangle p' = 90°$.

2. Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen, respectivamente iguales un cateto y un ángulo.

a) Un cateto y el ángulo adyacente.

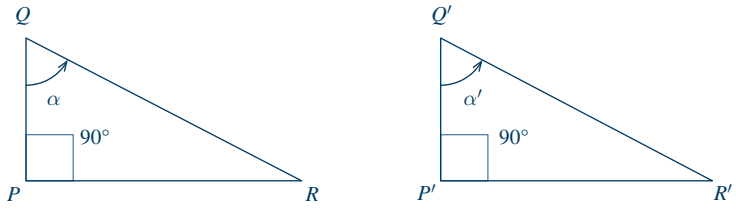


Si $\overline{PR} = \overline{P'R'}$ y $\measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$

$\therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$

por tener un lado igual e iguales los dos ángulos adyacentes.

b) Un cateto y un ángulo opuesto.

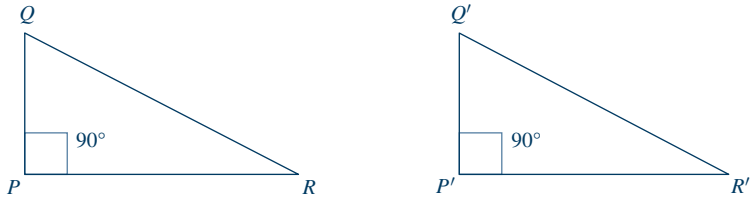


Si $\overline{PR} = \overline{P'R'}$ y $\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha'$

$\therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$

por tener un lado igual e iguales los dos ángulos adyacentes.

3. Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen igual la hipotenusa y uno de los catetos.

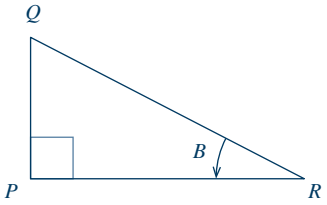


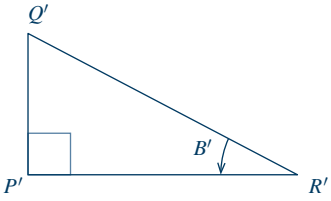
Si $\overline{QR} = \overline{Q'R'}$ y $\overline{PR} = \overline{P'R'}$

$\therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$

por tener tres lados iguales.

4. Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen respectivamente igual la hipotenusa y un ángulo.





Si $\overline{QR} = \overline{Q'R'}$ y $\measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$

$\therefore \quad \triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$

por tener iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.

Propiedades de los triángulos congruentes

1. En dos triángulos congruentes a ángulos iguales se oponen lados iguales y recíprocamente. Estos lados y ángulos se llaman homólogos.
2. En un triángulo, un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.
3. En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.
4. En dos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el ángulo comprendido, a mayor ángulo se opone mayor lado.
5. La altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles es también mediana y bisectriz del triángulo.

Aplicaciones de la igualdad de triángulos

1. Para demostrar que dos segmentos son congruentes suele ser útil demostrar que se oponen a ángulos iguales en triángulos iguales.
2. Para demostrar que dos ángulos son congruentes suele ser útil demostrar que dichos ángulos se oponen a lados iguales en triángulos iguales.

EJERCICIO **27**

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuándo existe la congruencia de triángulos?
2. Escribe los criterios que establecen la congruencia de triángulos.
3. Escribe los criterios aplicados en la congruencia de triángulos rectángulos.
4. Enuncia las propiedades de la congruencia de triángulos.
5. Cita las aplicaciones de la congruencia de triángulos.

II. Escribe la letra *F* si el enunciado es *falso* o *V* si el enunciado es *verdadero*.

1. Dos triángulos son congruentes si tienen los tres lados respectivamente iguales . . . . . _____
2. En un triángulo, un lado es mayor que la suma de los otros dos lados y menor que la diferencia . . . . . _____
3. Dos triángulos son congruentes si tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido entre ellos . . . . . _____
4. Dos triángulos son congruentes si superpuestos coinciden . . . . . _____
5. En un triángulo a mayor lado se opone menor ángulo y viceversa . . . . . _____

III. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

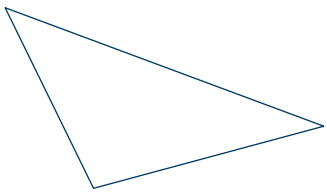
1. Traza los triángulos congruentes a los triángulos dados.

Escribe los números correspondientes

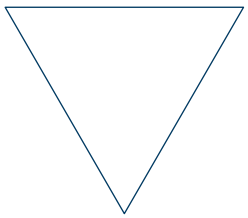
Competencias genéricas

Competencias disciplinares

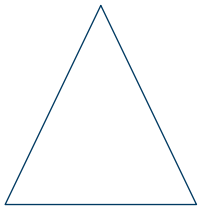
a)



b)



c)

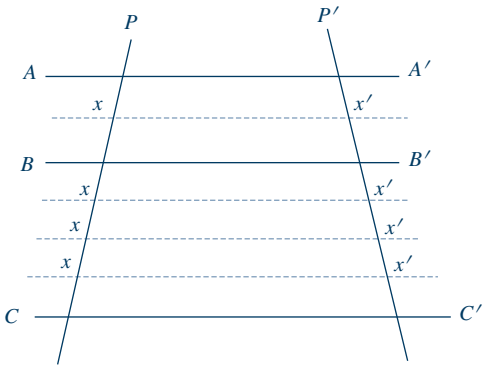


Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Teorema de Tales y sus aplicaciones

Teorema de Tales

Si un sistema de rectas paralelas cortan a dos transversales, éstas determinan en ellos segmentos correspondientes proporcionales.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'} \parallel \overleftrightarrow{CC'}$; P y P' son las transversales; $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son segmentos correspondientes de P y $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ son segmentos correspondientes de P'.

Tesis: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Construcción auxiliar: Dividimos los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por un segmento unidad $\overline{xx'}$ que esté contenido un número exacto de veces, por los puntos que se determinan se trazan paralelas $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$; para el segmento $\overline{AB}$ lo contiene m veces (dos) y $\overline{BC}$ lo contiene n veces (cuatro).

Demostración: (1) $\overline{AB} = m(\overline{xx'})$; por la construcción auxiliar.

(2) $\overline{BC} = n(\overline{xx'})$; por la construcción auxiliar.

(3) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{m}{n}$; por la razón de dos segmentos es el cociente de sus medidas con la misma unidad.

Dos igualdades pueden dividirse miembro a miembro, dando lugar a otra igualdad.

Por las mismas razones, tenemos para los segmentos

(4) $\overline{A'B'} = m(\overline{xx'})$

(5) $\overline{B'C'} = n(\overline{xx})$

(6) $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{m}{n}$

Al aplicar el carácter transitivo a la igualdad en (3) y (6), se tiene:

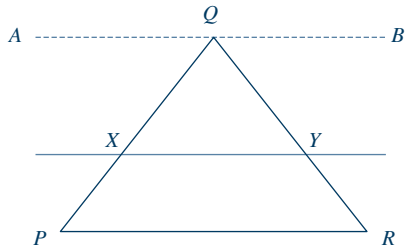
Conclusión: $\dfrac{\overline{AB}}{BC} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Este teorema de Tales se verifica para cualquier número de paralelas y sin importar la posición que puedan tener los transversales.

Aplicación del teorema de Tales a los triángulos

Como consecuencia del teorema de Tales, y aplicado al caso de triángulos, se tiene el siguiente teorema:

Teorema: **Toda paralela a un lado de un triángulo divide a los otros dos lados, en segmentos proporcionales.**



Hipótesis: Es el $\triangle PQR, \overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PR}$.

Tesis: $\dfrac{\overline{QX}}{\overline{XP}} = \dfrac{\overline{QY}}{\overline{YR}}$.

Construcción auxiliar: Por Q se traza $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PR}$.

Demostración: (1) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PR}$, por construcción auxiliar.

(2) $\overline{QP}$ y $\overline{QR}$ son transversales.

Conclusión: Al aplicar el teorema de Tales, se tiene $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{XP}} = \dfrac{\overline{QY}}{\overline{YR}}$.

EJERCICIO 28

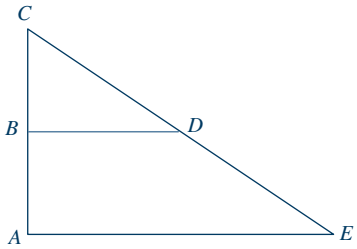
I. Resuelve los siguientes problemas gráficos y en plenaria discute tus resultados.

Escribe los números correspondientes

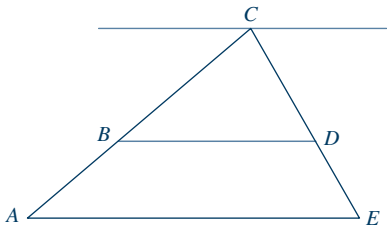
Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Demuestra que $\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}}$ de la siguiente figura cumple que $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$.



2. En la figura, si $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ y $\overline{CB} = 2\overline{AB}$, ¿qué valor tienen $\overline{CD}$ y $\overline{DE}$?



3. En la misma figura del problema anterior, si $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$, $\overline{CB} = 7$ cm, $\overline{BA} = 3$ cm y $\overline{CD} = 5$ cm, ¿qué valor tiene $\overline{DE}$?

4. Escribe y demuestra el enunciado del teorema de Tales.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

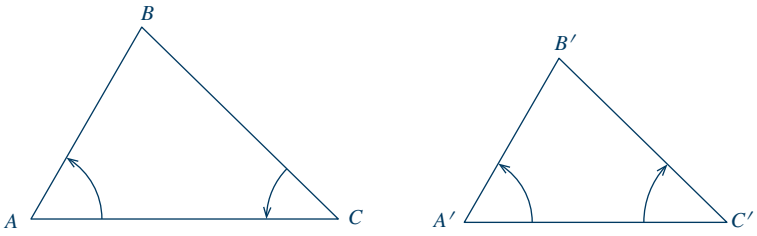
Semejanza de triángulos

Concepto de semejanza

Se denomina semejanza a las características y condiciones geométricas para reproducir las figuras con todos sus detalles, al hacer variar únicamente su tamaño y conservar su forma. El símbolo de la semejanza es $\sim$.

Triángulos semejantes

Dos triángulos son semejantes cuando tienen, respectivamente, sus ángulos iguales uno a uno y sus lados son proporcionales.



Son lados proporcionales:
$\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$; $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$;
$\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$.

Si $\measuredangle a = \measuredangle a'$, $\measuredangle b = \measuredangle b'$ y $\measuredangle c = \measuredangle c'$; $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ (lados proporcionales o razón de semejanza), entonces, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Caracteres de la semejanza de triángulos

La semejanza de triángulos es una relación de equivalencia y por lo tanto satisface los caracteres de:

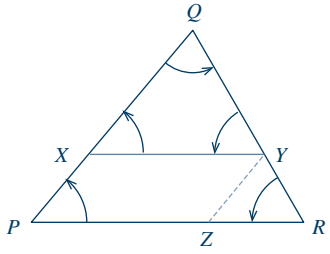
a) **Idéntico** o **reflejo**. Todo triángulo es semejante a sí mismo. $\triangle PQR \sim \triangle PQR$.

b) **Recíproco** o **simétrico**. Si un triángulo es semejante a otro, éste es semejante al primero. $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$ también $\triangle P'Q'R' \sim \triangle PQR$.

c) **Transitivo**. Dos triángulos semejantes a un tercero, son semejantes entre sí. $\triangle PQR \sim \triangle P''Q''R''$ y $\triangle P'Q'R' \sim \triangle P''Q''R''$; entonces, $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$.

Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

Toda paralela a un lado de un triángulo, forma como los otros lados un triángulo semejante al original.



Hipótesis: En el $\triangle PQR$, $\overline{XY} \parallel \overline{PR}$.

Tesis: $\triangle XQY \sim \triangle PQR$.

Construcción auxiliar: Por el punto Y se traza $\overline{YZ} \parallel \overline{PQ}$ y se forma el $\triangle RYZ$.

Demostración: En los $\triangle PQR$ y $\triangle XQY$, se tiene: $\measuredangle q = \measuredangle q$ por ser un ángulo común.
$\measuredangle x = \measuredangle p$ y $\measuredangle y = \measuredangle r$ por ser ángulos correspondientes.

(1) $\dfrac{\overline{XQ}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{YQ}}{\overline{RQ}}$ son lados proporcionales, por ser $\overline{XY} \parallel \overline{PR}$ (teorema de Tales).

(2) $\dfrac{\overline{YQ}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{PZ}}{\overline{PR}}$ son lados proporcionales, siendo $\overline{YZ} \parallel \overline{QP}$ con base en la construcción auxiliar (teorema de Tales).

(3) Comparando (1) y (2), tenemos: $\dfrac{\overline{XQ}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{YQ}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{PZ}}{\overline{PR}}$ aplicando el carácter transitivo.

(4) $\overline{PZ} = \overline{XY}$, por ser lados opuestos del paralelogramo $PZXY$.

(5) Sustituyendo (4) en (3), tenemos: $\dfrac{\overline{XQ}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{YQ}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{XY}}{\overline{PZ}}$.

Conclusión: $\measuredangle q = \measuredangle q$, $\measuredangle x = \measuredangle p$, $\measuredangle y = \measuredangle r$ y $\dfrac{\overline{XQ}}{\overline{PQ}} = \dfrac{\overline{YQ}}{\overline{RQ}} = \dfrac{\overline{XY}}{\overline{PZ}}$ $\therefore$ $\triangle XQY \sim \triangle PQR$.

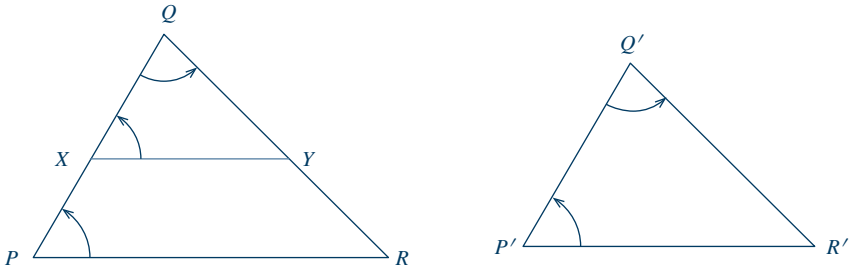
Teorema recíproco del fundamental de la semejanza de triángulos

Todo triángulo semejante a otro es igual a uno de los triángulos que pueden obtenerse trazando una paralela a la base de éste.

Casos de la semejanza de triángulos

Para determinar la semejanza entre dos triángulos no es necesario conocer la igualdad de todos los ángulos y la proporcionalidad de los lados homólogos, tal y como lo indica el teorema fundamental, razón que permite establecer los siguientes casos de semejanza de triángulos.

1. Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales.



Hipótesis: $\measuredangle p = \measuredangle p'$; $\measuredangle q = \measuredangle q'$.

Tesis: $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$

Construcción auxiliar: Tomemos $\overline{XQ} = \overline{P'Q'}$ y tracemos $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PR}$, formando el $\triangle XQY$.

Demostración: En los $\triangle XQY$ y $\triangle P'Q'R'$, tenemos:

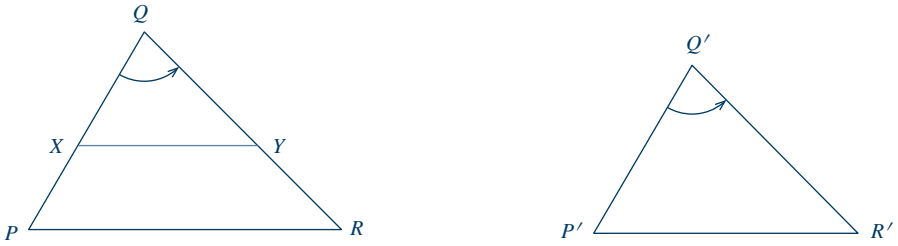
$\overline{XQ} = \overline{P'Q'}$, por construcción auxiliar, $\measuredangle q = \measuredangle q'$, por hipótesis, $\measuredangle x = \measuredangle p$, por ser ángulos correspondientes y $\measuredangle p = \measuredangle p'$, por hipótesis, entonces, $\measuredangle x = \measuredangle p'$ al aplicar el carácter transitivo.

(1) $\triangle XQY = \triangle P'Q'R'$, por tener iguales un lado y los dos ángulos adyacentes.

(2) $\triangle PQR \sim \triangle XQY$, aplicando el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.

Conclusión: Al comparar (1) y (2) y aplicar el carácter transitivo se tiene: $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$.

2. Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales e igual el ángulo comprendido.



Hipótesis: $\measuredangle q = \measuredangle q'$; $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}}$.

Tesis: $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$.

Construcción auxiliar: Tomemos $\overline{XQ} = \overline{P'Q'}$ al trazar $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PR}$, se forma el $\triangle XQY \sim \triangle PQR$.

Demostración: En el $\triangle XQY$ y $\triangle P'Q'R'$:

(1) $XQ = P'Q'$, por construcción auxiliar; $\measuredangle q = \measuredangle q'$, por hipótesis. En los $\triangle PQR$ y $\triangle XQY$.

(2) $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{XQ}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}}$, por ser lados homólogos de dos triángulos semejantes.

(3) Sustituyendo (1) en (2), tenemos: $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}}$.

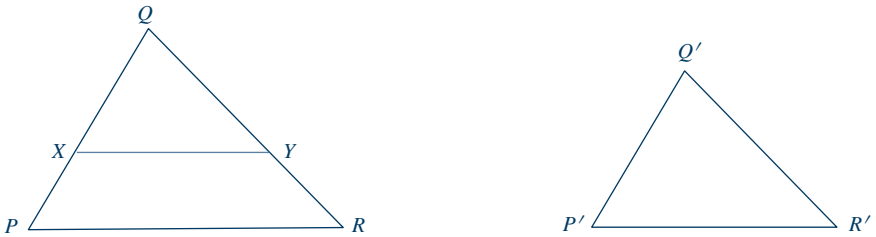
(4) $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}}$, por hipótesis.

(5) Comparando (3) y (4), aplicando el carácter transitivo, tenemos: $\frac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}}$

despejando $\overline{YQ}$: $\overline{YQ} = \frac{(\overline{RQ})(\overline{R'Q'})}{\overline{RQ}} = R'Q'$; entonces, $\triangle XQY = \triangle P'Q'R'$ por tener dos lados iguales e igual el ángulo comprendido.

Conclusión: Como $\triangle PQR \sim \triangle XQY$, por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos; y $\triangle XQY \sim \triangle P'Q'R'$, por el carácter idéntico; entonces, $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$ al aplicar el carácter transitivo.

3. Dos triángulos son semejantes cuando tienen proporcionales sus tres lados.



Hipótesis: $\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{P'R'}}$.

Tesis: $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$

Construcción auxiliar: Tomemos $\overline{XQ} = \overline{P'Q'}$ y trazando $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overleftrightarrow{PR}$, se forma el $\triangle XQY \sim \triangle PQR$

Demostración: (1) $\frac{\overline{RQ}}{\overline{XQ}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{XY}}$, por ser $\triangle PQR \sim \triangle XQY$ en la construcción auxiliar.

(2) Como $\overline{XQ} = \overline{P'Q'}$, por construcción.

(3) Sustituyendo (2) en (1), tenemos: $\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{XY}}$.

(4) $\frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{P'R'}}$, por hipótesis.

(5) Comparando (3) y (4) y aplicando el carácter transitivo. $\frac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{P'R'}}$.

Tomando las razones (1) y (3) , tenemos:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{XQ}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} \text{ despejando } \overline{XQ}\text{: } \overline{XQ} = \frac{(\overline{PQ})(\overline{P'Q'})}{(\overline{PQ})} = \overline{P'Q'}.$$

Tomando las razones (3) y (4), tenemos:

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{YQ}} = \frac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}} \text{ despejando } \overline{YQ}\text{: } \overline{YQ} = \frac{(\overline{RQ})(\overline{R'Q'})}{(\overline{RQ})} = \overline{R'Q'}$$

Conclusión: $\overline{XQ} = \overline{P'Q'}$, $\overline{YQ} = \overline{R'Q'}$, demostrado; $\overline{XY} = \overline{P'R'}$, por construcción.

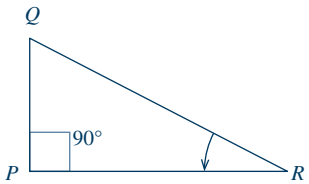
$\therefore$ $\triangle XQY = \triangle P'Q'R'$, por tener sus tres lados iguales; como $\triangle PQR \sim \triangle XQY$, por el teorema fundamental de la semejanza de triángulos; $\triangle XQY \sim \triangle P'Q'R'$, por el carácter idéntico;

$\therefore$ $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$ por el carácter transitivo.

Casos de semejanza de triángulos rectángulos

Como todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo recto igual entre ellos, su semejanza se condiciona a los siguientes casos:

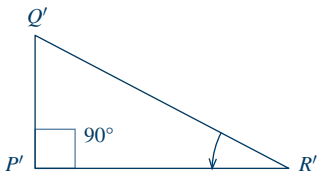
1. Dos triángulos rectángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo agudo igual.



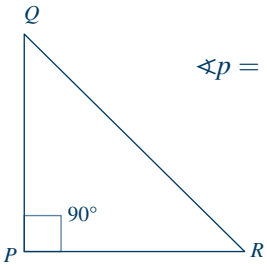
$\measuredangle p = \measuredangle p' = 90°$

$\measuredangle r = \measuredangle r'$

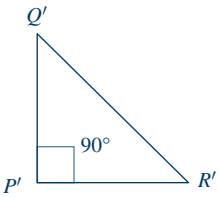
$\therefore$ $\triangle PQR \sim \triangle PQR$



2. Dos triángulos rectángulos son semejantes, cuando tienen los catetos proporcionales.



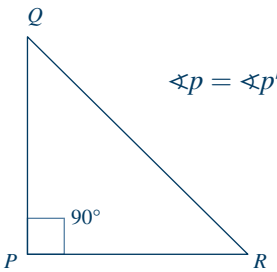
$\measuredangle p = \measuredangle p' = 90°$



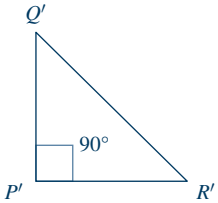
Si $\frac{\overline{PR}}{\overline{P'R'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}}$

$\therefore$ $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$

3. Dos triángulos rectángulos son semejantes, cuando tienen la hipotenusa y un cateto proporcional.



$\measuredangle p = \measuredangle p' = 90°$



Si $\frac{\overline{RQ}}{\overline{R'Q'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}}$

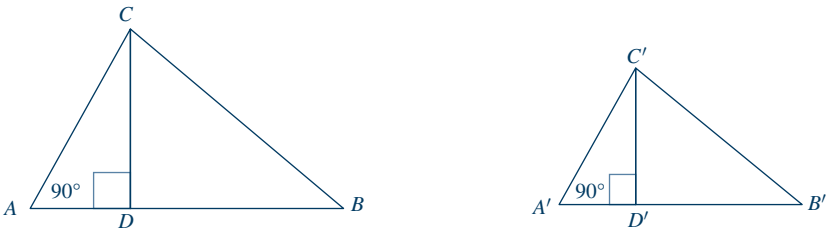
$\therefore$ $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$

Proporcionalidad de las alturas de dos triángulos semejantes

Las alturas de dos triángulos semejantes son proporcionales siempre y cuando sean las homólogas, lo cual conduce al siguiente teorema.

Teorema

Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son proporcionales a sus lados correspondientes.



Los triángulos ACD y $A'C'D'$ son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual ($\measuredangle A = \measuredangle A'$).

Luego: $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$, como se enuncia en el teorema.

EJERCICIO **29**

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

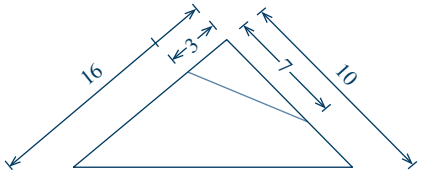
Competencias disciplinares

1. ¿Qué se entiende por semejanza?
2. Explica cuándo son semejantes dos triángulos.
3. ¿Cuáles son los caracteres de la semejanza de triángulos?
4. Escribe el teorema fundamental de la semejanza de triángulos.
5. ¿Cómo se enuncia el teorema recíproco del teorema fundamental en la semejanza de triángulos?
6. Cita los casos de la semejanza de triángulos.
7. ¿Cuáles son los casos de la semejanza de triángulo rectángulos?
8. Enuncia el teorema sobre la proporcionalidad de las alturas de dos triángulos semejantes.

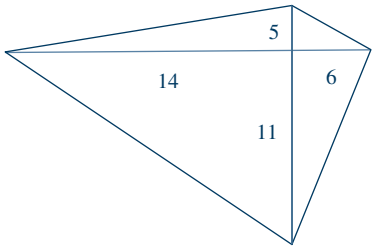
II. Resuelve los siguientes problemas gráficos y en plenaria discute tus resultados.

¿Cuál es la proporción necesaria para demostrar la semejanza de triángulos en las siguientes figuras?

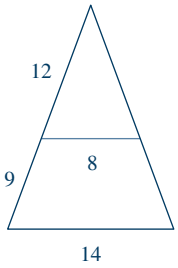
1.



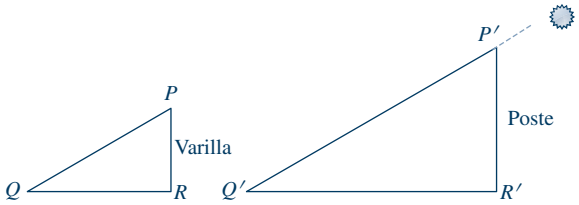
2.



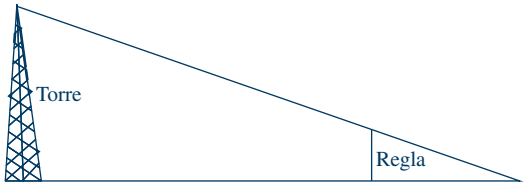
3.



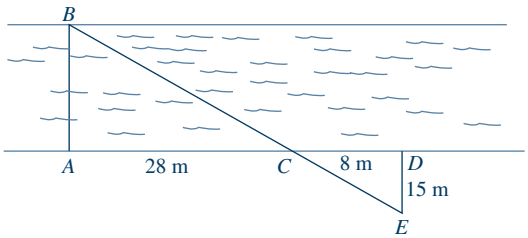
4. La sombra de un poste es de 10 m en el instante en que la sombra de una varilla de 2 m mide 5 m, si se colocan poste y varilla como se indica en la figura, ¿cuál es la altura del poste?



5. Una regla de 1.5 m de largo, que se coloca verticalmente, proyecta una sombra de 5 m en el momento en que una torre proyecta una sombra de 48 m, ¿qué altura tiene la torre?



6. Calcula la anchura del río, dados los datos de la siguiente figura.



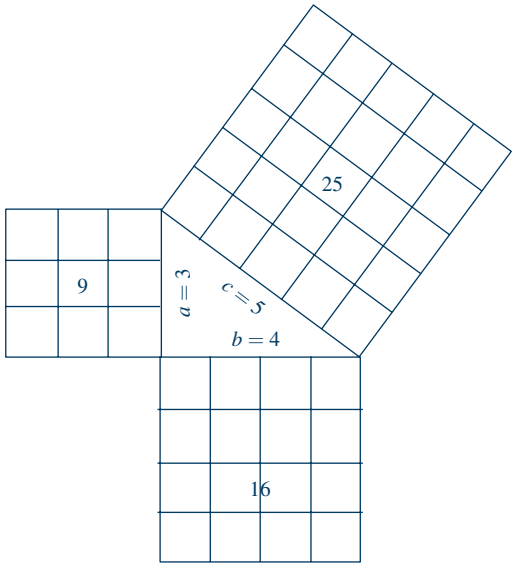
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Pitágoras observó que para todos los triángulos rectángulos los cuadrados construidos sobre los catetos, al sumar sus áreas, tienen un valor igual al área del cuadrado construido en la hipotenusa.



$c =$ Hipotenusa (5)

$a =$ Cateto opuesto (3)

$b =$ Cateto adyacente (4)

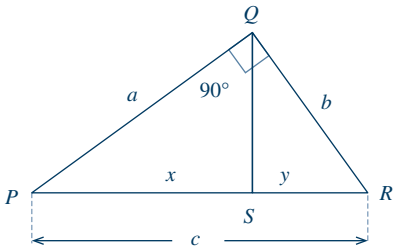
$$\therefore \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

En seguida se presenta una nueva demostración del teorema de Pitágoras, tomando como base las relaciones de altura del triángulo rectángulo y las semejanzas de triángulos.



Hipótesis: El $\triangle PQR$ es rectángulo en Q.

Tesis: $c^2 = a^2 + b^2$

Construcción auxiliar: Altura $\overline{QS} \perp \overline{PR}$ lo que implica que $\triangle PQR \sim \triangle PQS$ y $\triangle PQR \sim \triangle RQS$.

Demostración: En los $\triangle PQR \sim \triangle PQS$, tenemos:

(1) $\frac{c}{a} = \frac{a}{x}$, por ser respectivamente, hipotenusa y cateto mayor de dos triángulos semejantes.

(2) $a^2 = (cx)$, propiedades fundamentales de las proporciones.

(3) En los $\triangle PQR \sim \triangle RQS$ se tiene $\frac{c}{b} = \frac{b}{y}$, por ser respectivamente, hipotenusa y cateto menor de dos triángulos semejantes.

(4) $b^2 = (cy)$, propiedades fundamentales de las proporciones.

(5) $aa^2 + b^2 = (cx) + (cy)$, sumando miembro a miembro las igualdades (2) y (4).

(6) $a^2 + b^2 = c(x + y)$, sacando a c como factor en el segundo miembro de la ecuación.

(7) $(x + y) = c$, por construcción auxiliar.

(8) Al sustituir (7) en (6), tenemos: $a^2 + b^2 = c(c)$.

Conclusión: $c^2 = a^2 + b^2$.

Del teorema anterior se desprenden los siguientes corolarios:

1. En todo triángulo rectángulo, la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos, $c^2 = a^2 + b^2$.

   Sacando raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, tenemos: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. En todo triángulo, cada cateto es igual a la raíz cuadrada de la diferencia entre el cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto. Es decir,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

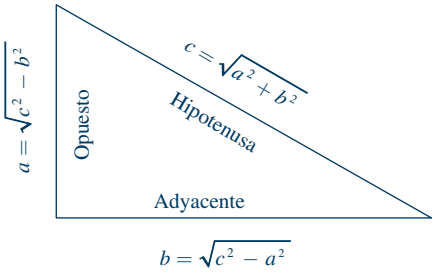
Al despejar a se tiene:

$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$\sqrt{a^2} = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Al despejar b se tiene:

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$\sqrt{b^2} = \sqrt{c^2 - a^2}$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Las fórmulas de los corolarios permiten conocer los siguientes elementos de un triángulo rectángulo.



Aplicaciones del teorema de Pitágoras

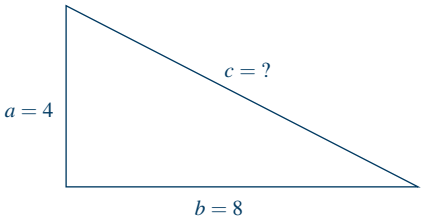
El teorema de Pitágoras permite obtener la medida de uno de los lados de un triángulo cuando los otros dos son conocidos. Es de gran importancia en la resolución de figuras geométricas, así como para el cálculo de problemas trigonométricos.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●●● Determina la medida del lado faltante en los siguientes triángulos rectángulos:

a)



Datos

$a = 4$

$b = 8$

$c = ?$

Fórmula

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Sustitución

$c = \sqrt{(4)^2 + (8)^2}$

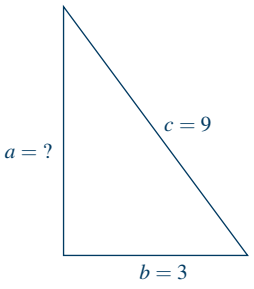
$c = \sqrt{16 + 64}$

$c = \sqrt{80}$

Resultado

$c = 8.944$

b)



Datos

$c = 9$

$b = 3$

$a = ?$

Fórmula

$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Sustitución

$c = \sqrt{(9)^2 - (3)^2}$

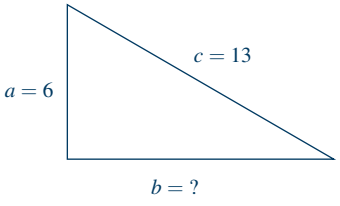
$c = \sqrt{81 - 9}$

$c = \sqrt{72}$

Resultado

$a = 8.485$

c)



Datos

$a = 6$

$c = 13$

$b = ?$

Fórmula

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

Sustitución

$b = \sqrt{(13)^2 - (6)^2}$

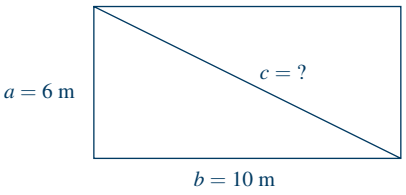
$b = \sqrt{169 - 36}$

$b = \sqrt{133}$

Resultado

$b = 11.532$

2 ●●• Un rectángulo mide 10 m de largo y 6 m de ancho, encuentra el valor de su diagonal.



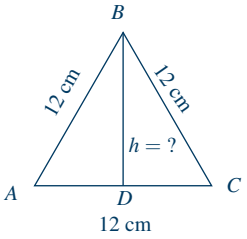
Datos
$a = 6$ m
$b = 10$ m
$c = ?$

Fórmula
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Sustitución
$c = \sqrt{(6\text{m})^2 + (10\text{m})^2}$
$c = \sqrt{36\text{m}^2 + 100\text{m}^2}$
$c = \sqrt{136\text{m}^2}$

Resultado
$c = 11.661$ cm

3 ●●• Encuentra la altura (h) de un triángulo equilátero, si se sabe que sus lados miden 12 cm.



Datos
$\overline{AB} = c = 12\text{m}$
$\overline{AD} = b = 6\text{m}$
$\overline{BD} = h = a = ?$

Fórmula
$a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Sustitución
$c = \sqrt{(12\text{m})^2 - (6\text{m})^2}$
$c = \sqrt{144\text{m}^2 - 36\text{m}^2}$
$c = \sqrt{108\text{m}^2}$

Resultado
$a = 10.392$ cm

Clasificación de un triángulo al conocer los tres lados

Un triángulo es rectángulo, acutángulo u obtusángulo, cuando el cuadrado del lado mayor es igual, menor o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Cuando: $\measuredangle a =$ recto, $c^2 = a^2 + b^2$
$\measuredangle a <$ recto, $c^2 < a^2 + b^2$
$\measuredangle a >$ recto, $c^2 > a^2 + b^2$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●●• Clasifica el triángulo cuyos lados miden $c = 5$ m, $a = 3$ m y $b = 4$ m.

Datos
cuadrado del lado mayor: $c^2 = 25\text{ m}^2$
cuadrado de los otros lados: $a^2 = 9\text{ m}^2$
$b^2 = 16\text{ m}^2$

Sustitución
sumando $a^2 + b^2$,
tenemos: 25 m^2
$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2$
$\therefore$ es un triángulo rectángulo.

2 ●●· Clasifica el triángulo cuyos lados miden $c = 12$ m, $b = 10$ m y $a = 8$ m.

Datos
cuadrado del lado mayor: $c^2 = 144\ m^2$
cuadrado de los otros lados: $a^2 = 64\ m^2$
$b^2 = 100\ m^2$

Sustitución
sumando $a^2 + b^2$,
tenemos: $164\ m^2$
$\therefore\ c^2 < a^2 + b^2$
$\therefore$ es un triángulo acutángulo.

3 ●●· Clasifica el triángulo cuyos lados miden $a = 16$ cm, $b = 24$ cm y $c = 30$ cm.

Datos
cuadrado del lado mayor: $c^2 = 900\ cm^2$
cuadrado de los otros lados: $a^2 = 256\ cm^2$
$b^2 = 576\ cm^2$

Sustitución
sumando $a^2 + b^2$
tenemos: $832\ cm^2$
$\therefore\ c^2 > a^2 + b^2$
$\therefore$ es un triángulo obtusángulo.

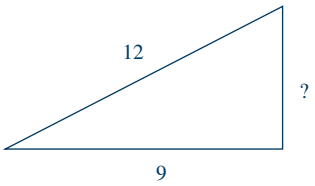
EJERCICIO **30**

I. Resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

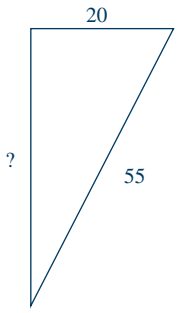
Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. Aplicando el teorema de Pitágoras, determina la medida del lado faltante en los siguientes triángulos:

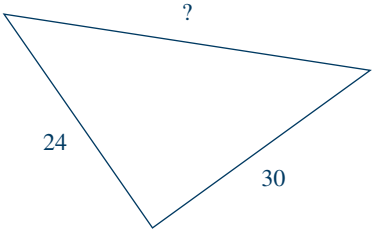
a)



b)



c)



2. Encuentra la altura de un triángulo isósceles si su base mide 4 cm y sus lados miden 6 cm cada uno.

3. Encuentra el lado de un cuadrado si su diagonal mide 8 m.

4. Determina el valor de la diagonal de un rombo si un lado mide 25 cm y la otra diagonal mide 19 cm.

5. La diagonal de un rectángulo mide 13 cm de lado y 4 cm de ancho. Determina el valor de su longitud.

6. Clasifica los triángulos siguientes, si sus lados son:

   a) $c = \sqrt{85}, a = 6$ y $b = 7$

   b) $c = 8, a = 5$ y $b = 6$

   c) $c = 11, a = 10$ y $b = 10.5$

   d) $c = 18, a = 12$ y $b = 16$

e) $c = 10$, $a = 7$ y $b = 8$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Área, perímetro y semiperímetro de triángulos

Área

Es la medida de una superficie, es decir, el área se refiere al **tamaño** de la figura. Matemáticamente se representa por la letra ***A*** (mayúscula). El área de una figura plana es la medida de la extensión de dicha figura, es decir, la relación entre la superficie de la figura y la superficie elegida como unidad de medida. Se entiende por superficie como la forma de la figura; por ejemplo, hay superficies rectangulares, cuadradas, circulares, etcétera.

Área del triángulo

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura. Matemáticamente se expresa por la fórmula $A = \dfrac{bh}{2}$ donde b es la base del triángulo y h es la altura del mismo.

Cálculo de las alturas de un triángulo

Para un triángulo $\triangle ABC$ cualquiera, si se conoce la longitud de sus lados (a, b, c), se pueden calcular las longitudes de las alturas (h_a, h_b, h_c) respectivas, así se aplican las siguientes fórmulas:

$$h_a = \frac{\tau}{a}$$

$$h_b = \frac{\tau}{b}$$

$$h_c = \frac{\tau}{c}$$

Donde h_a es la altura correspondiente al lado a, h_b es la altura correspondiente al lado b, h_c es la altura correspondiente al lado c y el término τ es:

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)}$$

Área del triángulo en función de sus lados (fórmula de Herón)

El área de un triángulo en términos de sus lados a, b y c, está dada por la fórmula: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; donde p es el semiperímetro del triángulo.

Área de un triángulo equilátero en función del lado

El área de un triángulo equilátero de lado ℓ está dada por la fórmula: $A = \dfrac{\sqrt{3\ell^2}}{4}$, donde $\ell = a = b = c$ que son los lados del triángulo.

Perímetro

Es la suma de las longitudes de los lados de una figura. Matemáticamente se representa por la letra P (mayúscula).

Para determinar el **perímetro** de cualquier triángulo, se tiene por fórmula: $P = a + b + c$.

Semiperímetro

Es la semisuma de las longitudes de los lados de un triángulo, es decir, es la mitad del perímetro. Matemáticamente se representa por la letra p (minúscula).

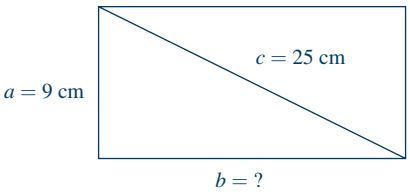
Para determinar el **semiperímetro** de cualquier triángulo, se tiene por fórmula:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{p}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●●● Calcula el área, perímetro y semiperímetro del triángulo que se forma con la diagonal de un rectángulo que mide 25 cm de lado y 9 cm de ancho.



Datos

$c = 25$ cm

$a = h = 9$ cm

$b = ?$

$A = ?$

$P = ?$

$p = ?$

Fórmulas

$b = \sqrt{c^2 = a^2}$

$A = \dfrac{bh}{2}$

$P = a + b + c$

$p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{p}{2}$

Sustitución

$b = \sqrt{(25\text{ cm})^2 - (9\text{ cm})^2}$

$b = \sqrt{625\text{ cm}^2 - 81\text{ cm}^2}$

$b = \sqrt{544\text{ cm}^2}$

$b = 23.323\text{ cm}$

$A = \dfrac{(23.323\text{ cm})(9\text{ cm})}{2}$

$A = \dfrac{209.907\text{ cm}^2}{2}$

$A = 104.9535\text{ cm}^2$

$P = 9\text{ cm} + 23.323\text{ cm} + 25\text{ cm}$

$P = 57.323\text{ cm}$

$p = \dfrac{57.323\text{ cm}}{2}$

$p = 28.6615\text{ cm}$

Resultado

$b = 23.323\text{ cm}$ $P = 57.3230\text{ cm}$

$A = 104.9535\text{ cm}^2$ $p = 28.6615\text{ cm}$

2 ●●· Aplicando la fórmula de Herón, comprueba el área del problema anterior.

Datos

$p = 28.6615\text{ cm}$

$a = 9\text{ cm}$

$b = 23.323\text{ cm}$

$c = 25\text{ cm}$

$A = ?$

Fórmula

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Sustitución

$A = \sqrt{28.6615\text{cm}(28.6615\text{cm} - 9\text{cm})(28.6615\text{cm} - 23.323\text{cm})(28.6615\text{cm} - 25\text{cm})}$

$A = \sqrt{28.6615\text{cm}(19.6615\text{cm})(5.3385\text{cm})(3.6615\text{cm})}$

$A = \sqrt{1105.23707\text{cm}^4}$

$A = 104.953\text{ cm}^2$

Resultado

$A = 104.9530\text{cm}^2$

3 ●●· Determina el área del triángulo equilátero de 8 m de lado.

Datos

$\ell = 8\text{ m}$

Fórmula

$A = \dfrac{\sqrt{3}\ell^2}{4}$

Sustitución

$A = \dfrac{\sqrt{3}(8\text{m}^2)}{4}$

$A = \sqrt{3}(64\text{m}^2)$

$A = 16\sqrt{3}\text{m}^2$

$A = 27.712\text{m}^2$

Resultado

$A = 27.7120\text{m}^2$

4 ●●• Determina el perímetro, semiperímetro y el área de un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 12 m, respectivamente.

Datos

$a = 6\,\text{m}$

$b = 8\,\text{m}$

$c = 12\,\text{m}$

$P = ?$

$p = ?$

$A = ?$

Fórmulas

$P = a + b + c$

$p = \dfrac{P}{2}$

$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Sustituciones

$P = 6\,\text{m} + 8\,\text{m} + 12\,\text{m}$

$P = 26\,\text{m}$

$p = \dfrac{26\,\text{m}}{2}$

$p = 13\,\text{m}$

$A = \sqrt{13\,\text{m}(13\,\text{m} - 6\,\text{m})(13\,\text{m} - 8\,\text{m})(13\,\text{m} - 12\,\text{m})}$

$A = \sqrt{13\,\text{m}(7\,\text{m})(5\,\text{m})(1\,\text{m})}$

$A = \sqrt{455\,\text{m}^4}$

$A = \sqrt{21.33\,\text{m}^2}$

Resultado

$A = \sqrt{21.33}\,\text{m}^2$

$P = 26\,\text{m}$

$p = 13\,\text{m}$

EJERCICIO **31**

I. Contesta las siguientes preguntas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Qué es el perímetro?
2. ¿Cómo se define el semiperímetro?
3. Diferencia entre área y superficie.

II. En los espacios, resuelve los siguientes problemas y en plenaria discute tus resultados.

1. Calcula el área, perímetro y semiperímetro del triángulo que se forma con la diagonal de un rectángulo que mide 42 cm de lado y 14 cm de ancho.

2. Aplicando la fórmula de Herón, comprueba el área del problema anterior.

3. Determina el área del triángulo equilátero de 12 cm de lado.

4. Determina el área, perímetro y semiperímetro de los siguientes triángulos cuyos lados miden:

   a) $a = 30$, $b = 24$ y $c = 18$

   b) $a = 10$, $b = 8$ y $c = 7$

   c) $c = 81$, $a = 21$ y $b = 52$

   d) $a = 6$, $b = 5$ y $c = 8$

5. Aplicando la fórmula de Herón, comprueba el área de los problemas anteriores.

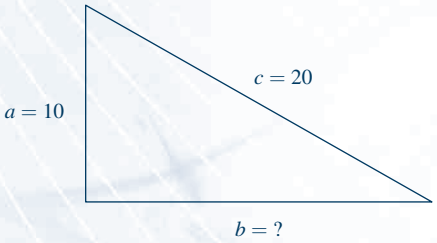
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Si el valor de un ángulo de un triángulo rectángulo es igual a 38°, ¿cuál es el valor del tercer ángulo?, representa gráficamente dicho triángulo.

2. Aplicando el teorema de Pitágoras, determina la medida del lado faltante en el siguiente triángulo rectángulo.



3. Determina el área, el perímetro y el semiperímetro de un triángulo isósceles cuyos lados son $a = 5$, $b = 5$ y $c = 3$.

4. Determina el área, el perímetro y el semiperímetro de un triángulo cuyos lados son $a = 6$, $b = 4$ y $c = 8$.

5. Determina el área, el perímetro y el semiperímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden son $a = 10$, $b = 8$ y comprueba el área aplicando la fórmula de Herón.

UNIDAD 5

Polígonos

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Qué es un polígono?

2. Menciona cinco elementos de un polígono.

3. ¿En qué nos puede ayudar el dividir en triángulos un polígono?

4. Escribe cuatro propiedades de los cuadriláteros.

5. ¿Cómo sabemos si un cuadrilátero es un paralelogramo?

Polígonos

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición, notación y clasificación de polígonos.
- Deduzca las diagonales y ángulos de un polígono.
- Conozca las propiedades y clasificación de cuadriláteros y sus trazos.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Definición, notación y clasificación de polígonos.
- Diagonales y ángulos de un polígono.
- Cuadriláteros: propiedades, clasificación y trazos.

Contenidos procedimentales

- Identificará si una figura geométrica es un polígono.
- Resolverá y argumentará problemas de diagonales y ángulos de polígonos.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos de cuadriláteros.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Definición, notación y clasificación de polígonos

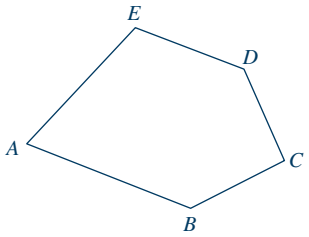
Definición de polígono

Etimológicamente, la palabra **polígono** proviene de las raíces *poly´s* que significa "muchos" y *gōnía* que significa "ángulo"; por lo tanto, es un "trazo que contiene muchos ángulos". También se define como la figura plana limitada por una curva cerrada, llamada **línea poligonal** o **contorno**.

Notación

Como se aprecia en la figura, los polígonos se nombran mediante letras mayúsculas situadas en los vértices del mismo.

Su notación se efectúa escribiendo las letras mayúsculas, después de la palabra **polígono** o del nombre específico del polígono o también por sus símbolos gráficos.



Notación: **polígono *ABCDE***
⬠ *ABCDE*
pentágono *ABCDE*

En un polígono hay que considerar:

a) **Lados**. Son las rectas que limitan al polígono.

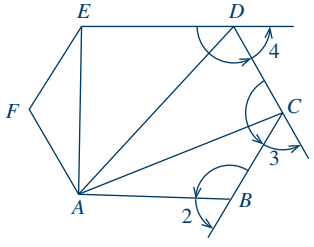
b) **Ángulos internos**. Son los formados por dos lados consecutivos.

c) **Ángulos externos**. Son los formados por un lado y la prolongación del lado adyacente.

Cada ángulo externo es suplemento del ángulo interior adyacente.

d) **Vértices**. Son los extremos comunes de cada dos segmentos consecutivos, es decir, son los de los ángulos internos del polígono.

e) **Diagonales**. Son las rectas que unen dos vértices no consecutivos del polígono.



En la figura son:

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ y $\overline{FA}$.

Ángulos internos: $\measuredangle A, \measuredangle B, \measuredangle C, \measuredangle D, \measuredangle E$ y $\measuredangle F$

Ángulos externos: $\measuredangle 1, \measuredangle 2, \measuredangle 3, \measuredangle 4, \measuredangle 5$ y $\measuredangle 6$

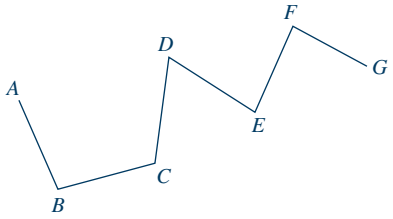
Vértices: A, B, C, D, E y F.

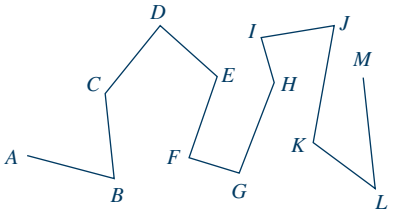
Diagonales: $\overline{AC}, \overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

Perímetro: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FA}$.

Poligonal abierta

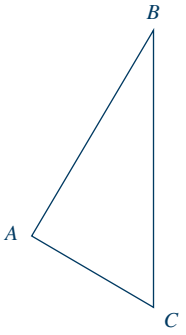
Son los segmentos que no pertenecen a una misma recta, ordenados de manera que cada uno de los intermedios tenga un extremo común con el anterior y otro con el que le sigue.

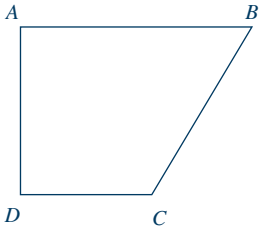


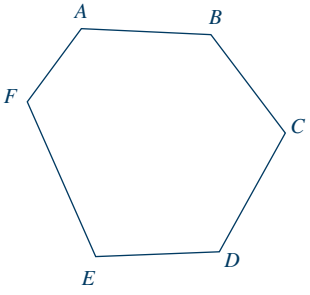


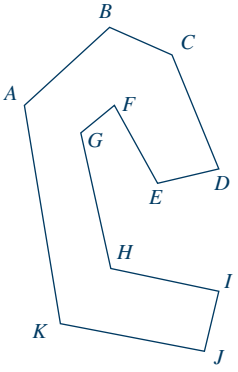
Poligonal cerrada

Es una poligonal en la que el extremo del último segmento y el origen del primero coinciden.







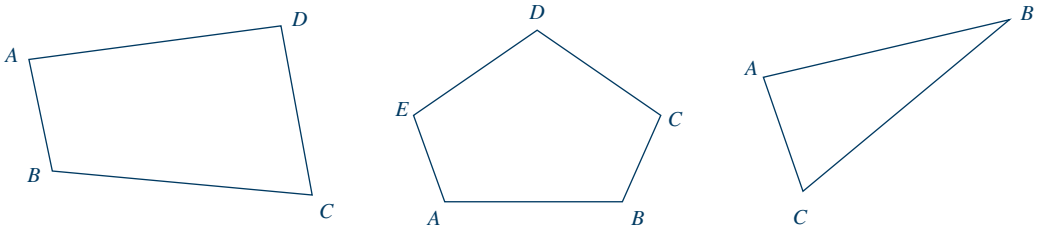


Clasificación de los polígonos

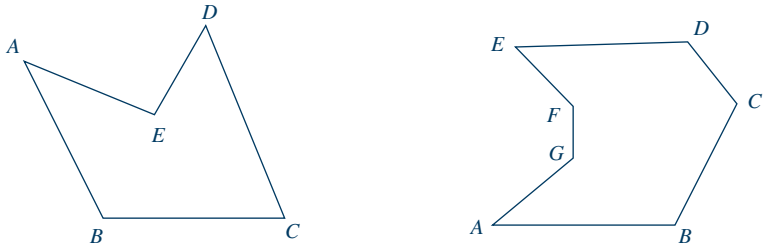
Se han establecido tres distintas clasificaciones de los polígonos, que son:

1. Según el carácter entrante o saliente de los ángulos del polígono se distinguen:

   a) **Polígonos convexos**. Cuando tienen todos sus ángulos salientes, es decir, tienen todos sus ángulos menores que 180°.

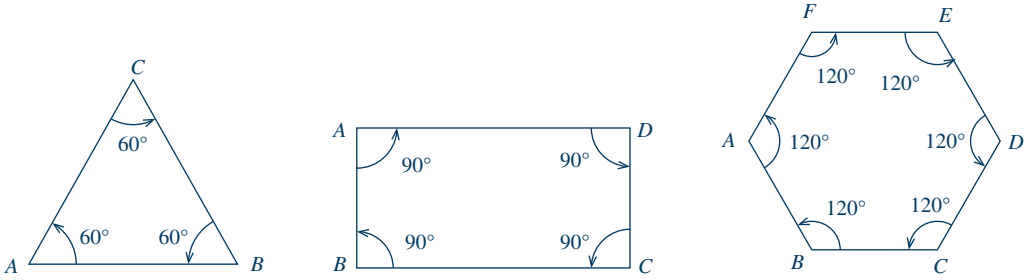


b) **Polígonos cóncavos**. Cuando tienen algún ángulo entrante, es decir, uno o más de sus ángulos interiores son mayores que 180°; también se pueden cruzar sus lados, en cuyo caso se les conoce como **polígonos estrellados**.

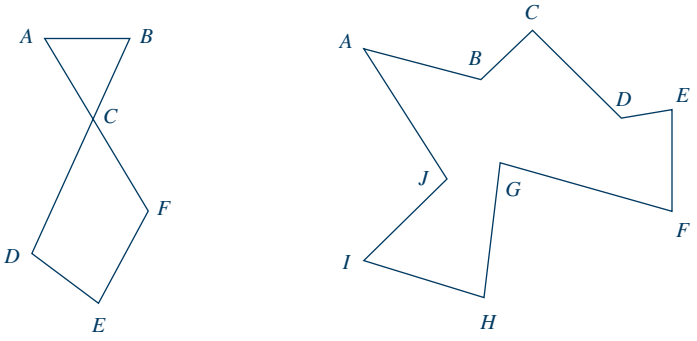


2. Según la regularidad de sus elementos se distinguen:

a) **Polígonos regulares**. Son aquellos que tienen todos sus lados y ángulos iguales, es decir, que son equiláteros y equiángulos.



b) **Polígonos irregulares**. Son aquellos que no tienen todos sus lados y ángulos iguales, es decir, cuando no son regulares.



3. Según el número de lados, algunos polígonos reciben nombres específicos.

Número de lados		Nombre del polígono
Tres	_____	Triángulo
Cuatro	_____	Cuadrilátero
Cinco	_____	Pentágono
Seis	_____	Hexágono
Siete	_____	Heptágono
Ocho	_____	Octágono
Nueve	_____	Eneágono
Diez	_____	Decágono
Once	_____	Endecágono
Doce	_____	Dodecágono

Si el polígono tiene más de 12 lados se denomina de *n* lados. Por ejemplo, trece lados, catorce lados, etcétera.

EJERCICIO **32**

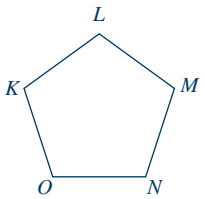
I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes
Competencias genéricas
Competencias disciplinares

1. Etimológicamente, ¿como se define *polígono*?
2. Explica la notación de los polígonos.
3. ¿Qué elementos se consideran en los polígonos?
4. ¿Cómo se forma un ángulo interno en los polígonos?
5. ¿Qué son las diagonales en un polígono?
6. Cita la clasificación de los polígonos.
7. ¿Cómo se llama el polígono que tiene todos sus lados y ángulos iguales?
8. Escribe el nombre y número de lados de los primeros cinco polígonos.

II. Resuelve los siguientes problemas.

1. Identifica en la figura los elementos de un polígono.



2. Dibuja una poligonal abierta y una cerrada.

3. ¿Qué es y cómo se grafica un polígono convexo?

4. ¿Qué es y cómo se grafica un polígono regular?

5. Si un polígono tiene nueve lados, ¿cuántos vértices tendrá? ¿Y cuántos ángulos?

6. Dibuja un polígono irregular de siete lados.

7. Dibuja un polígono cóncavo en forma de estrella.

8. Dibuja un polígono de 12 lados.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Diagonales y ángulos de un polígono

Suma de ángulos interiores

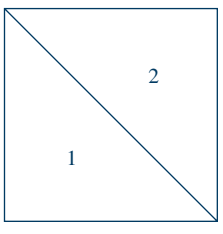
Para determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono, es necesario trazar las diagonales que tengan por extremos un vértice, y así determinar cuántos triángulos lo dividen; se busca la relación con el triángulo por ser el polígono de menor número de lados y cuyos ángulos interiores suman dos rectos (180°).

La relación que existe entre el número de lados y los triángulos formados por sus diagonales en un polígono es. **El número de triángulos de un polígono es igual al número de lados del polígono disminuido en dos unidades**.

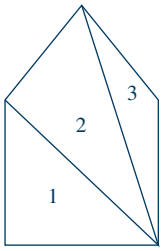
Fórmula: Triángulo $=$ (Lados $-$ 2)$\triangle = (n - 2)$

Siendo n el número de lados de cualquier polígono.

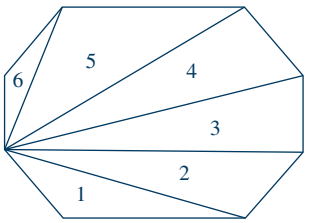
Ejemplos gráficos



4 lados
2 triángulos



5 lados
3 triángulos



8 lados
6 triángulos

Teorema

La suma de los ángulos interiores ($\Sigma\sphericalangle i$) de un polígono es igual al producto de dos ángulos rectos ($2R = 180°$) por el número de lados (n) del polígono, menos 2.

$$\Sigma\sphericalangle i = 2R(n-2)$$
$$\Sigma\sphericalangle i = 180°(n-2)$$

Corolario

El valor de un ángulo interior ($\sphericalangle i$) de un polígono regular es igual a la suma de los ángulos interiores ($\Sigma\sphericalangle i$) dividida entre el número de lados (n) de dicho polígono.

$$\sphericalangle i = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{\Sigma\sphericalangle i}{n}$$

Suma de ángulos exteriores (teorema)

La suma de los ángulos exteriores ($\Sigma\sphericalangle e$) de todo polígono es igual a cuatro rectos ($4R = 360°$).

$$\Sigma\sphericalangle e = 4R$$
$$\Sigma\sphericalangle e = 360°$$

Corolario

El valor de un ángulo exterior ($\sphericalangle e$) de un polígono regular es igual a la suma de los ángulos exteriores ($\Sigma\sphericalangle e$) dividida entre el número de lados (n) de dicho polígono.

$$\sphericalangle e = \frac{4R}{n} = \frac{360°}{n} = \frac{\Sigma\sphericalangle e}{n}$$

Número de diagonales (teorema)

El número de diagonales (d) que pueden trazarse desde un vértice es igual al número de lados (n) del polígono menos 3.

$$d = n - 3$$

Teorema

Si n es el número de lados del polígono, el número total de diagonales (D) que pueden trazarse desde todos los vértices del polígono está dado por la fórmula:

$$D = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{nd}{2}$$

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Encuentra la suma de los ángulos interiores de un pentágono.

Datos	Fórmula	Sustitución
$n = 5$ lados	$\Sigma \measuredangle i = 180°(n-2)$	$\Sigma \measuredangle i = 180°(5-2)$
$\Sigma \measuredangle i = ?$		$\Sigma \measuredangle i = 180°(3)$
		$\therefore \ \Sigma \measuredangle i = 540°$

2 ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores es de 1260°?

Datos	Fórmula	Sustitución	
$\Sigma \measuredangle i = 1260°$	$\Sigma \measuredangle i = 180°(n-2)$	$n = \dfrac{1260°}{180°} + 2$	$n = 9$ lados
$n = ?$	$n - 2 = \dfrac{\Sigma \measuredangle i}{180°}$	$n = 7 + 2$	$\therefore$ El polígono se denomina **eneágono**.
	$n = \dfrac{\Sigma \measuredangle i}{180°} + 2$		

3 Determina el valor de un ángulo interior de un hexágono regular.

Datos	Fórmula	Sustitución
$n = 6$ lados	$\measuredangle i = \dfrac{180°(n-2)}{n}$	$\measuredangle i = \dfrac{180°(6-2)}{6}$
$\measuredangle i = ?$		$\measuredangle i = \dfrac{180°(4)}{6} = \dfrac{720°}{6}$
		$\measuredangle i = 120°$

4 Determina cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior vale 135°.

Datos	Fórmula	Sustitución
$\measuredangle i = 135°$	$\measuredangle i = \dfrac{180°(n-2)}{n}$	$n = \dfrac{360°}{(180° - 135°)}$
$n = ?$	$n \measuredangle i = 180°n - 360°$	$n = \dfrac{360°}{45°}$
	$180°n - n \measuredangle i = 360°$	$n = 8$ lados
	$n(180° - \measuredangle i) = 360°$	$\therefore$ El polígono se denomina **octágono**.
	$n = \dfrac{360°}{(180° - \measuredangle i)}$	

5 ●●• Calcula la suma de los ángulos exteriores de un heptágono.

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$n = 7$ lados	$\Sigma \measuredangle e = 4R$	$\Sigma \measuredangle c = 360°$
$\Sigma \measuredangle e = ?$	$\Sigma \measuredangle e = 360°$	Solución directa por teorema.

6 ●●• Encuentra el valor de un ángulo exterior de un decágono.

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$n = 10$ lados	$\measuredangle e = \dfrac{\Sigma \measuredangle e}{n}$	$\measuredangle e = \dfrac{360°}{10}$
$\Sigma \measuredangle e = 360°$		$\therefore \quad \measuredangle e = 36°$

7 ●●• ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior es de 120°?

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$\measuredangle e = 120°$	$\measuredangle e = \dfrac{\Sigma \measuredangle e}{n}$	$n = \dfrac{360°}{120°} = 3$ lados
$\Sigma \measuredangle e = 360°$	$n = \dfrac{\Sigma \measuredangle e}{\measuredangle e}$	$\therefore$ El polígono se denomina **triángulo**.

8 ●●• Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un octágono?

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$n = 8$ lados	$d = n - 3$	$d = 8 - 3$
$d = ?$		$\therefore \quad d = 5$ diagonales

9 ●●• ¿Cuál es el polígono en el que se pueden trazar seis diagonales desde un vértice?

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$d = 6$ diagonales	$d = n - 3$	$n = 6 + 3 = 9$ lados
$n = ?$	$n = d + 3$	$\therefore$ El polígono se denomina **eneágono**.

10 ●●• Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono de 20 lados.

Datos	**Fórmula**	**Sustitución**
$n = 20$ lados	$D = \dfrac{n(n-3)}{2}$	$D = \dfrac{20(20-3)}{2} = \dfrac{20(17)}{2} = \dfrac{340}{2}$
$D = ?$		$\therefore \quad D = 170$ diagonales en total.

11 ¿Cuál es el polígono en el cual se pueden trazar 14 diagonales en total?

Datos

$D = 14$ diagonales
$n = ?$

fórmula general para las ecuaciones de segundo grado.

Fórmula

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$2D = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 2D = 0$$

$$\left\{ n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right.$$

Sustitución

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(1)(-28)}}{2}$$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{3 \pm 11}{2}$$

$$n = \frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ lados}$$

$\therefore$ El polígono se denomina **heptágono**.

EJERCICIO 33

I. En equipo, resuelvan en su cuaderno los siguientes problemas y en plenaria discutan sus resultados.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Cuántos triángulos pueden trazarse en los siguientes polígonos?

   a) cuatro lados
   b) hexágono
   c) nueve lados
   d) pentadecágono
   e) 19 lados
   f) 25 lados

2. Determina la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos.

   a) tridecágono
   b) heptágono
   c) decágono
   d) 18 lados
   e) 17 lados
   f) 22 lados

3. ¿A qué polígono corresponde cada una de las sumas de ángulos interiores?

   a) 1800°
   b) 360°
   c) 720°
   d) 1980°
   e) 2880°
   f) 7020°

4. Encuentra el valor de un ángulo interior de los siguientes polígonos.

   a) pentágono
   b) octágono
   c) dodecágono
   d) 18 lados
   e) 24 lados
   f) 30 lados

5. Determina cuál es el polígono regular cuyo ángulo interior mide:

   a) 120°
   b) 157.5°
   c) 108°
   d) 60°
   e) 90°
   f) 165°

6. Calcula el valor de un ángulo exterior de los siguientes polígonos.

   a) 7 lados
   b) 11 lados
   c) 17 lados
   d) 21 lados
   e) 27 lados
   f) 32 lados

7. Calcula el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en los siguientes polígonos.

   a) triángulo
   b) heptágono
   c) undecágono
   d) pentadecágono
   e) octágono
   f) 16 lados

8. ¿En qué polígonos pueden ser trazadas las siguientes diagonales?

   a) ocho diagonales
   b) 11 diagonales
   c) 14 diagonales
   d) 17 diagonales
   e) 23 diagonales
   f) 35 diagonales

9. Calcula el número total de diagonales que se pueden trazar en los siguientes polígonos.

   a) nueve lados
   b) 13 lados
   c) 16 lados
   d) 22 lados
   e) 27 lados
   f) 33 lados

10. Encuentra el polígono en el cual se pueden trazar las siguientes diagonales en total.

    a) 12 diagonales
    b) 20 diagonales
    c) 26 diagonales
    d) 30 diagonales
    e) 42 diagonales
    f) 66 diagonales

11. ¿A qué polígonos corresponden los siguientes ángulos exteriores?

    a) 90°
    b) 45°
    c) 150°
    d) 60°
    e) 75°
    f) 135°

12. La suma de los ángulos interiores de un polígono es igual a cuatro veces la suma de los ángulos exteriores de dicho polígono. ¿De qué polígono se trata?

13. La suma de los ángulos exteriores de un polígono regular es igual a la suma de los ángulos interiores de dicho polígono ¿Cuántos lados tiene?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Cuadriláteros: propiedades, clasificación y trazos

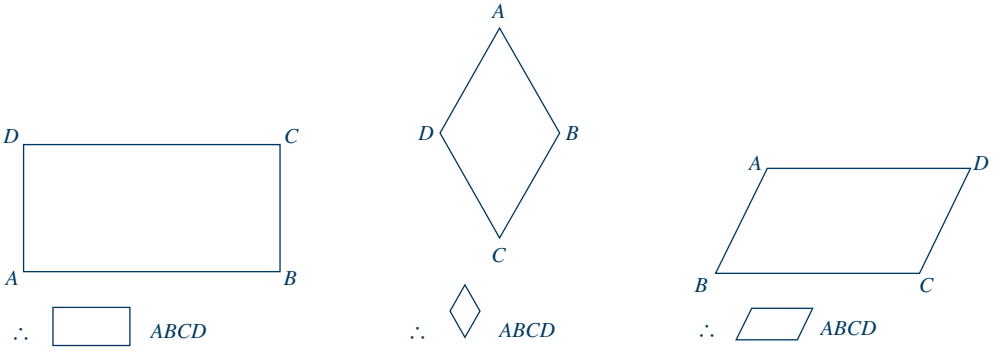
Definición de cuadrilátero

Los polígonos limitados por cuatro lados y que además forman entre sí cuatro ángulos se denominan **cuadriláteros**.

Notación

Todo cuadrilátero se indica por las letras mayúsculas de sus vértices, escritos enseguida de su representación gráfica.

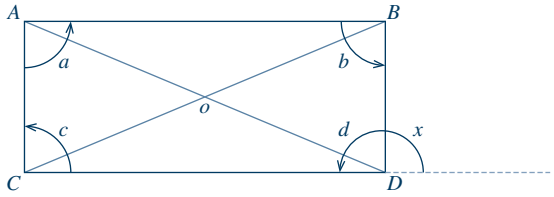
Ejemplos



Propiedades de los cuadriláteros

1. Los **lados opuestos** son iguales y no tienen ningún vértice en común.
2. Los **lados consecutivos** tienen un vértice en común.
3. Los **vértices y ángulos opuestos** no pertenecen a un mismo lado, pero son ángulos iguales.
4. La **suma de ángulos interiores** es igual a cuatro rectos (360°).
5. Los **ángulos adyacentes** a un mismo lado son suplementarios, es decir, suman 180°.
6. Las **diagonales** se cortan en su punto medio.
7. El **número total de diagonales** que pueden trazarse siempre son dos y se cortan en un punto interior.
8. Desde un vértice sólo puede trazarse una **diagonal**.

Representación gráfica de las propiedades



$\left.\begin{matrix}\overline{AB}\text{ y }\overline{CD}\\ \overline{AC}\text{ y }\overline{BD}\end{matrix}\right\}$ Pares de lados opuestos

$\left.\begin{matrix}\overline{AB}\text{ y }\overline{BD}\\ \overline{BD}\text{ y }\overline{DC}\end{matrix}\right\}$ Pares de lados consecutivos $\left\{\begin{matrix}\overline{AC}\text{ y }\overline{CD}\\ \overline{DB}\text{ y }\overline{BA}\end{matrix}\right.$

$\left.\begin{matrix}A\text{ y }D\\ B\text{ y }C\end{matrix}\right\}$ Pares de vértices opuestos

$\left.\begin{matrix}\sphericalangle a\text{ y }\sphericalangle d\\ \sphericalangle b\text{ y }\sphericalangle c\end{matrix}\right\}$ Pares de ángulos opuestos

$\left.\begin{matrix}\sphericalangle a=\sphericalangle b=\sphericalangle c=\sphericalangle d=90^\circ\\ \sphericalangle a+\sphericalangle b+\sphericalangle c+\sphericalangle d=360^\circ\end{matrix}\right\}$ Suma de los ángulos interiores $=4R=360^\circ$

$\sphericalangle x$ ángulo exterior $\quad\therefore\quad$ $\sphericalangle x$ y $\sphericalangle d$ son ángulos adyacentes y

$\sphericalangle d$ ángulo interior $\quad$ $\sphericalangle x+\sphericalangle d=180^\circ$ suplementarios

AD y BC son las diagonales que se intersectan en su punto medio O.

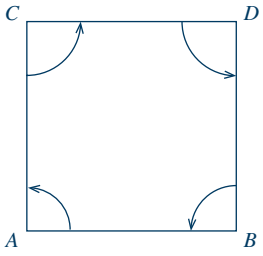
Desde los vértices A o D sólo puede trazarse una diagonal; lo mismo vale para los vértices B o C.

Clasificación de cuadriláteros

Los cuadriláteros se clasifican atendiendo a sus ángulos y a la forma de sus lados, es decir, al paralelismo de sus lados opuestos.

1. Si los lados opuestos son paralelos entre sí se les denomina **paralelogramos**.
   A su vez, los paralelogramos pueden ser:

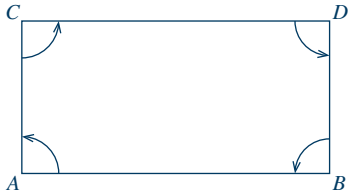
   a) **Cuadrados**. Es un polígono regular que tiene sus ángulos y lados iguales.



$\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AC}=\overline{BD}$

$\sphericalangle A=\sphericalangle B=\sphericalangle C=\sphericalangle D=90^\circ$

b) **Rectángulos**. Es un paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales, es decir, solamente sus lados opuestos son iguales; sus cuatro ángulos son rectos.

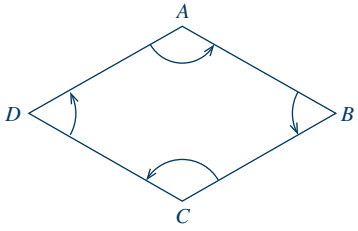


$\overline{AB} \neq \overline{BD}$ $\quad$ $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AC} \neq \overline{CD}$ $\quad$ $\overline{AC} = \overline{BD}$

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$

c) **Rombos**. Paralelogramos que tienen sus lados iguales y sus ángulos son oblicuos, es decir, sus ángulos no son rectos; sus ángulos opuestos son iguales.

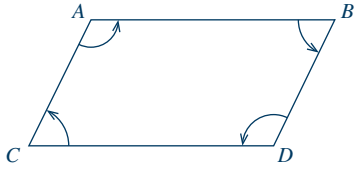


$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

$\measuredangle A = \measuredangle C \neq 90°$

$\measuredangle B = \measuredangle D \neq 90°$

d) **Romboides**. Paralelogramo que tiene sus lados contiguos desiguales, es decir, solamente sus lados opuestos son iguales y sus ángulos son oblicuos.



$\overline{AB} \neq \overline{BD}$ $\quad$ $\overline{AB} = \overline{CD}$

$\overline{AC} \neq \overline{CD}$ $\quad$ $\overline{AC} = \overline{BD}$

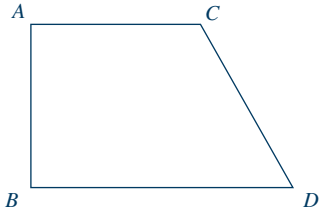
$\measuredangle A = \measuredangle D > 90°$

$\measuredangle B = \measuredangle C < 90°$

2. Si únicamente dos de sus lados opuestos son paralelos, es decir, los que se llaman **bases**, se denominan **trapecios**.

   A su vez, los trapecios pueden ser:

   a) **Trapecio escaleno**. Es aquel que tiene los lados no paralelos desiguales.

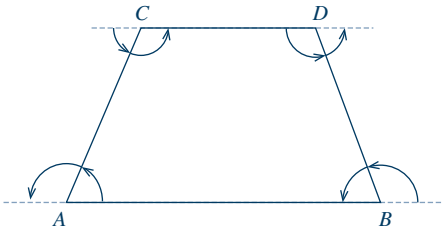


$\overline{AB} \neq \overline{CD}$

$\overline{AC} \neq \overline{BD}$

$\therefore \quad \overline{AB} \neq \overline{BD} \neq \overline{DC} \neq \overline{AC}$

b) **Trapecio isósceles**. Es aquel que tiene los lados no paralelos de igual longitud, formando con las bases ángulos adyacentes iguales.



$\overline{AC} = \overline{BD}$

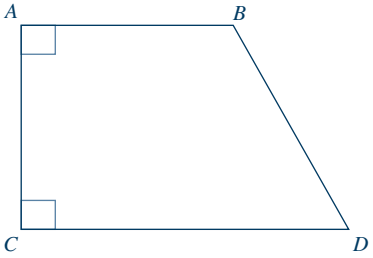
$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las bases del trapecio

$\sphericalangle A$ y $\sphericalangle W$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle X$, $\sphericalangle C$ y $\sphericalangle Y$, $\sphericalangle D$ y $\sphericalangle Z$, son ángulos adyacentes.

Siendo $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ y $\sphericalangle C = \sphericalangle D$

$\sphericalangle X = \sphericalangle W$ y $\sphericalangle Y = \sphericalangle Z$

c) **Trapecio rectángulo**. Es aquel que tiene un lado perpendicular a las bases, formando un ángulo recto con cada base.



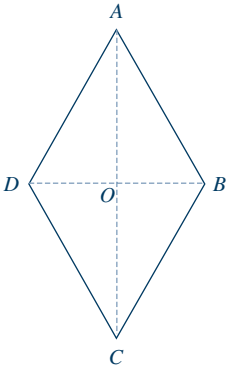
$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las bases

$\overline{AC} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AC} \perp \overline{CD}$

$\therefore \quad \sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$

3. Los cuadriláteros cuyos lados opuestos no son paralelos entre sí se denominan **trapezoides**. A su vez, los trapezoides pueden ser:

a) **Trapezoides simétricos**. Son los que tienen dos pares de lados consecutivos iguales pero el primer par de lados consecutivos iguales es diferente del segundo.

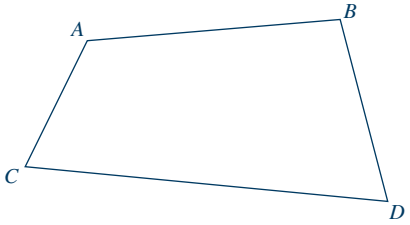


$\overline{BA} = \overline{AD}$

$\overline{BC} = \overline{CD}$

$\overline{BA}$ y $\overline{AD} \neq \overline{BC}$ y $\overline{CD}$

b) **Trapezoides asimétricos**. Son aquellos que no ofrecen ninguna de las características de un trapezoide simétrico.



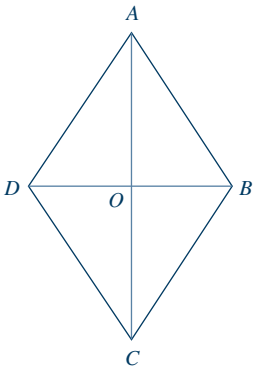
$\overline{AB} \neq \overline{BD} \neq \overline{DC} \neq \overline{CA}$

$\therefore \quad \measuredangle A \neq \measuredangle B \neq \measuredangle C \neq \measuredangle D$

Trazos en cuadriláteros

Al considerar los paralelogramos, observamos que:

Las diagonales se cortan en el punto medio de ambas; al punto de intersección se le llama **centro de simetría**. Si se trata de un rombo, las diagonales son perpendiculares entre sí; en un rectángulo, ambas diagonales tienen igual longitud; las diagonales de un cuadrado cumplen con todas las condiciones anteriores.

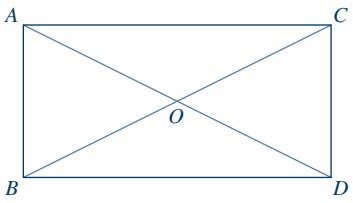


$\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ Diagonales del rombo

$\overline{AC} \cap \overline{DB} = O$ Centro de simetría

$\overline{AC} \perp \overline{DB}$ Perpendiculares

$\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ Bisectrices de los ángulos cuyos vértices se unen.

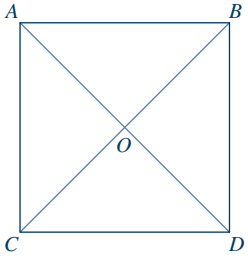


$\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ Diagonales del rentángulo

$\overline{AD} \cap \overline{BC} = O$ Centro de simetría

$\overline{AD} = \overline{BC}$ Longitudes iguales

$\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ Bisectrices de los ángulos cuyos vértices se unen.



$\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ Diagonales del cuadrado

$\overline{AD} \cap \overline{CB} = O$ Centro de simetría

$\overline{AD} \perp \overline{CB}$ Perpendiculares

$\overline{AD} = \overline{CB}$ Longitudes iguales

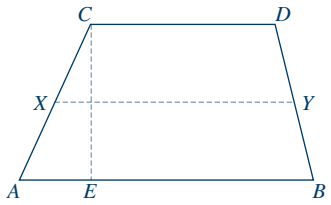
$\overline{AD}$ y $\overline{CB}$ Bisectrices de los ángulos cuyos vértices se unen.

En los **trapecios** se observan los siguientes trazos:

Los lados paralelos se llaman **bases** y como son desiguales una se identifica como **base menor** y la otra como **base mayor**.

Se llama **altura del trapecio** a la distancia entre las bases, siendo la altura una **perpendicular común** a dichas bases.

A la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio se denomina **paralela media** o **base media**, cuya longitud es igual a la **semisuma de las bases**.



$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ Bases del trapecio.

$\overline{AB}$ Base mayor, $\overline{CD}$ Base menor

$\overline{CE}$ Altura del trapecio

$\overline{CE} \perp \overline{AB}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ } Perpendiculares

$\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ Lados no paralelos, X y Y son sus puntos medios

$\overline{XY}$ Paralela media o base media

$\overline{XY} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$ Propiedad de los trapecios

EJERCICIO 34

I. En tu cuaderno contesta las siguientes preguntas:

Escribe los números correspondientes

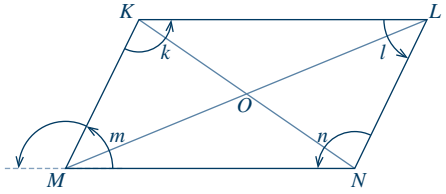
Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. ¿Qué es un cuadrilátero?
2. ¿Cuál es la notación de los cuadriláteros?
3. Cita las principales propiedades de los cuadriláteros.
4. Escribe la clasificación de los cuadriláteros.
5. ¿Cuál es el polígono regular que tiene sus lados y ángulos iguales?
6. ¿Cuál es el paralelogramo de lados iguales y de ángulos oblicuos?
7. ¿Cuál es el trapecio que tiene un lado perpendicular a las bases, formando un ángulo recto con cada base?
8. ¿Qué es un trapezoide simétrico?
9. Explica los principales trazos en un cuadrilátero.
10. ¿Cómo se llama la distancia entre las bases? ¿Qué es perpendicular común a dichas bases?

II. En los espacios realiza lo que se indica y en plenaria discute tus resultados.

1. Demuestra las principales propiedades de los cuadriláteros en la siguiente figura.



2. Elabora la gráfica de la altura y de la base media de un trapecio.

3. Elabora la gráfica de un trapezoide simétrico y de un asimétrico.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Dibuja un polígono cóncavo y señala: *a*) un lado, *b*) un ángulo interno, *c*) un ángulo externo, *d*) un vértice y *e*) una diagonal.

2. Completa las siguientes frases:

   a) La suma de los ángulos _____ de un polígono es igual al _____ de dos ángulos _____ por el _____ de _____ del polígono, menos _____.

   b) La suma de los ángulos _____ de todo polígono es igual a _____.

3. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores es de: *a*) 5580°, *b*) 10800°, *c*) 1980°?

4. Dibuja un cuadrilátero romboide y señala: *a*) vértices y ángulos opuestos, *b*) número total de diagonales.

5. ¿Cuál es la diferencia entre un rombo, un romboide y un trapecio en términos de sus lados y ángulos?

UNIDAD 6

Circunferencia y círculo

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Define circunferencia.

2. Menciona tres elementos de la circunferencia.

3. Menciona tres figuras en el círculo.

4. Define en qué consiste el cuadrante circular.

Circunferencia y círculo

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición, notación y elementos en una circunferencia.
- Interprete las posiciones relativas de una recta y una circunferencia.
- Interprete las figuras y ángulos en el círculo.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Definición, notación y elementos en una circunferencia.
- Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.
- Figuras y ángulos en el círculo.

Contenidos procedimentales

- Diferenciará entre círculo y circunferencia.
- Identificará las principales partes de la circunferencia.
- Distinguirá las diferentes figuras y ángulos en un círculo.
- Resolverá problemas utilizando los conceptos aprendidos.

Contenidos actitudinales

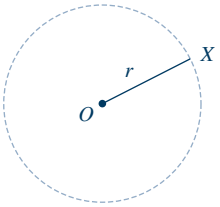
- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Definición, notación y elementos en una circunferencia

Definición de circunferencia

Es una curva plana y cerrada, cuyos puntos equidistan de otro punto interior llamado **centro**.

El centro de la circunferencia se representa por el punto O; al segmento $\boldsymbol{r}$ que representa la distancia igual del centro a cada uno de los puntos de la circunferencia se le denomina **radio**.



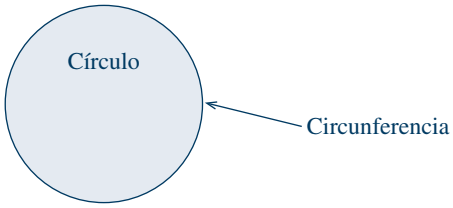
$\overline{OX} = r$ Radio de la circunferencia.

O centro de la circunferencia

Definición de círculo

Es la porción interior del plano separado por la circunferencia, que sirve de **frontera** con la región exterior.

En la figura, el círculo ha sido sombreado para indicar que se trata del espacio interior a la circunferencia.

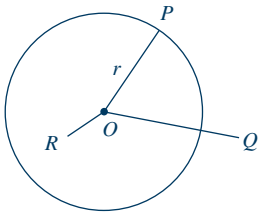


Puntos interiores y exteriores de la circunferencia

La circunferencia divide al plano en dos regiones, una **exterior** y otra **interior**.

Los puntos que se ubican a distancias menores que el radio se llaman **puntos interiores** y están contenidos en el círculo.

Los puntos que se ubican a distancias mayores que el radio se llaman **puntos exteriores**.



$\overline{OP}$ Radio de la circunferencia

$\overline{OR} < r, \quad \therefore \quad \boldsymbol{R}$ es punto interior

$\overline{OQ} > r, \quad \therefore \quad \boldsymbol{Q}$ es punto exterior

Notación

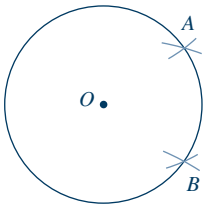
Una circunferencia o un círculo se denota con las letras del centro O y del radio r escritas de la siguiente manera: $c(O,r)$

Por lo general se reemplazan las palabras circunferencia o círculo por el símbolo ⊙.

Elementos de la circunferencia

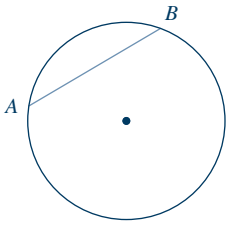
Los principales elementos de la circunferencia son:

Arco. Es una porción de circunferencia determinada por dos de sus puntos llamados **extremos del arco**.



$\overset{\frown}{AB}$ A de la circunferencia

Cuerda. Es el segmento que está limitado por dos puntos de la circunferencia. **Subtiende** el arco que termina en sus extremos. De los dos arcos que determina una cuerda en la circunferencia, al menor de ellos se le llama **arco correspondiente a la cuerda**.



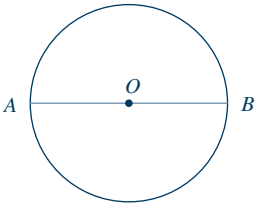
$\overline{AB}$ cuerda de la circunferencia

$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{BA}$

$\therefore$ $\overset{\frown}{AB}$ arco correspondiente a la cuerda.

Diámetro. Es el segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por su centro. El diámetro es la cuerda de mayor longitud que puede trazarse en la circunferencia; los arcos que se forman son iguales.

El diámetro es igual a la suma de dos radios.



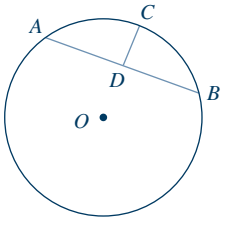
$\overline{AB}$ diámetro de la circunferencia

$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ radios de la circunferencia

$\therefore$ $\overline{AB} = \overline{OA} + \overline{OB}$

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BA}$ arcos iguales.

Flecha o sagita. Es la parte de radio perpendicular que va del punto medio de la cuerda hacia el arco subtendido por ella.



$\overline{AB}$ cuerda y $\overset{\frown}{AB}$ arco de la circunferencia.

$D = \dfrac{\overline{AB}}{2}$, punto medio de la cuerda

$\overline{DC} \perp \overline{AB}$ perpendicularidad

$\therefore$ $\overline{DC}$ flecha o sagita de la circunferencia.

EJERCICIO 35

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

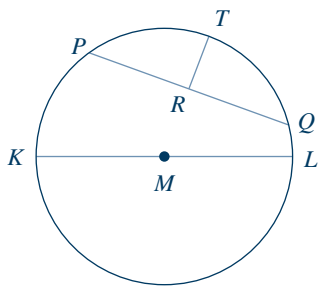
I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tu respuesta.

1. Bajo tus propias palabras explica la diferencia entre circunferencia y círculo.
2. ¿Qué son los puntos interiores y exteriores de la circunferencia?
3. ¿Cuál es la notación de circunferencia?
4. Nombra los elementos de una circunferencia.
5. ¿Qué es un arco en la circunferencia?
6. ¿Cómo se define la cuerda en la circunferencia?
7. Bajo tus propias palabras explica la diferencia entre radio y diámetro de la circunferencia.
8. Segmento perpendicular que va del punto medio de la cuerda hacia el arco subtendido por ella.

II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

1. Gráficamente qué es una circunferencia y un círculo.

2. En la siguiente figura, identifica los elementos de la circunferencia.



3. Elabora la gráfica de un punto exterior y uno interior en una circunferencia.

4. Elabora la gráfica del arco correspondiente a la cuerda de la circunferencia.

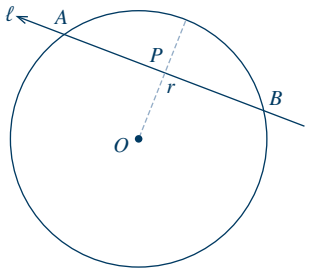
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Al considerar una recta y una circunferencia, se observan las siguientes posiciones.

Secante

Es cuando la recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes; la distancia de la recta al centro de la circunferencia es menor que su radio.



Sea ℓ la recta llamada **secante**.

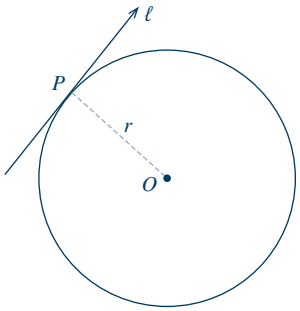
A y B puntos comunes de la secante y la circunferencia.

$\overline{OP}$ distancia del centro a la recta ℓ.

$\therefore \quad \overline{OP} < r$

Tangente

Es cuando la recta y la circunferencia tienen sólo un punto en común; la distancia de la recta al centro de la circunferencia es igual a la longitud de su radio.



Sea ℓ la recta llamada **tangente**.

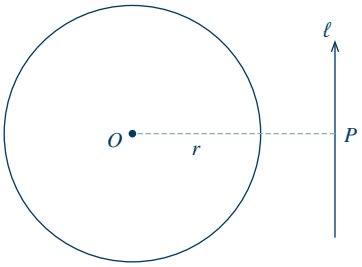
P punto común de la tangente y la circunferencia.

$\overline{OP}$ distancia del centro a la recta ℓ.

$\therefore \quad \overline{OP} = r$

Exterior

Es cuando la recta y la circunferencia no tienen ningún punto en común; la distancia del centro a la recta es mayor que la longitud del radio.



Sea ℓ la recta llamada **exterior**.

$\overline{OP}$ distancia del centro a la recta ℓ.

$\therefore \quad \overline{OP} > r$

EJERCICIO **36**

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es la secante en una circunferencia?
2. ¿Cuál es el nombre de la recta que tiene un solo punto en común con la circunferencia?
3. ¿Cuál es la relación entre una recta exterior a una circunferencia y la longitud del radio de ésta?

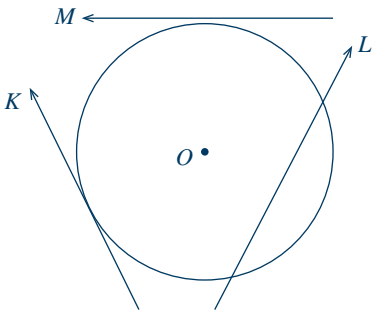
II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Identifica en la siguiente figura la posición de cada una de las rectas con respecto a la circunferencia.



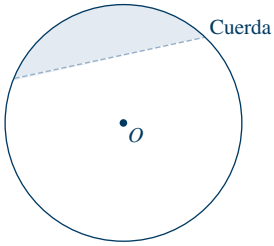
2. Traza dos tangentes paralelas a una circunferencia.

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

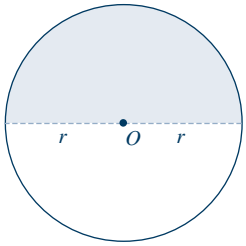
Figuras y ángulos en el círculo

Figuras en el círculo

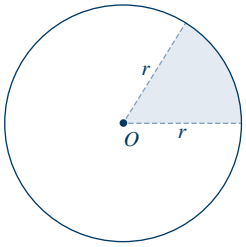
Segmento circular. **Es la parte de círculo limitado por una cuerda y su arco.**



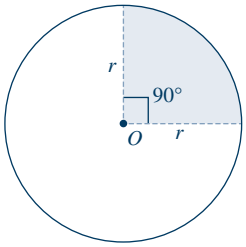
Semicírculo. **Es la parte de círculo limitado por un diámetro y su arco de circunferencia respectivo.**



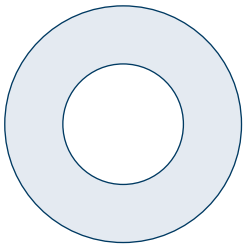
Sector circular. **Es la parte de círculo limitada por dos radios y su arco.**



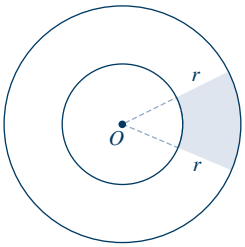
Cuadrante circular. **Es la parte circular determinada por dos radios, cuando forman un ángulo recto (90°).**



Corona circular. Es el espacio definido por dos circunferencias concéntricas

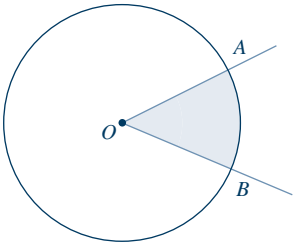


Trapecio circular. Es la porción de **corona** limitada por dos radios.

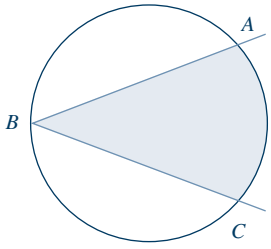


Ángulos en el círculo

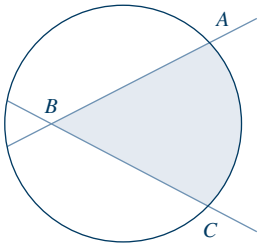
Ángulo central. Ángulo trazado en el círculo cuyo vértice coincide con su centro.



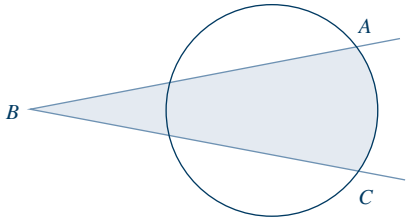
Ángulo inscrito. Ángulo cuyo vértice coincide con cualquier punto de la circunferencia y sus lados pasan por dos puntos de la misma.

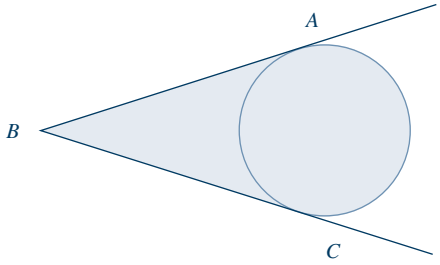


Ángulo excéntrico. **Ángulo cuyo vértice está dentro del círculo pero sin coincidir con el centro.**



Ángulo exterior. **Ángulo cuyo vértice es exterior al círculo, pero sus lados son secantes o tangentes a la circunferencia.**





EJERCICIO **37**

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. Cita los principales elementos en el círculo.

_____

2. ¿Cuáles son los principales ángulos de relevancia en el círculo?

_____

3. ¿Qué es un semicírculo?

_____

4. ¿Cuál es el nombre que recibe la figura definida por dos circunferencias concéntricas?

_____

5. ¿Qué es un ángulo inscrito?

_____

6. Ángulo de vértice exterior al círculo y de lados secantes a una circunferencia.

_____

II. Resuelve los siguientes problemas gráficos.

1. A partir de un círculo, trazar:

a) Segmento circular

b) Sector circular

c) Trapecio circular

d) Ángulo central

e) Ángulo inscrito

f) Ángulo excéntrico

III. Realiza la siguiente investigación y en plenaria discute tu respuesta.

1. ¿Cómo se realiza el cálculo de los valores aproximados de π?

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. ¿Cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia?

2. Define qué es el ángulo inscrito y qué es el ángulo excéntrico.

3. Define en qué consiste el trapecio circular.

4. ¿Cuál es la relación entre la recta y la circunferencia de una secante?

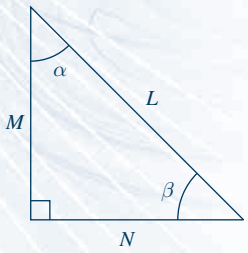
UNIDAD 7

Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Evaluación diagnóstica

Realiza lo que se indica en cada caso.

1. Dado el siguiente triángulo rectángulo señala las relaciones de sen, csc y tan:



2. Tomando como base el triángulo rectángulo anterior, si M mide 3 m y L mide 9.35 m calcula, el valor del cateto N y los valores de α y β.

3. Si un cuadrado mide 33.7 cm de lado, ¿cuál es el valor de su diagonal?

4. Enuncia en qué consiste las leyes de cosenos.

Relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo

Propósito de la unidad

Que el estudiante:

- Conozca la definición de trigonometría y sus relaciones trigonométricas.
- Identifique las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud.
- Maneje las relaciones numéricas entre las funciones trigonométricas.
- Realice las identidades trigonométricas.
- Conozca los triángulos oblicuángulos y aplique la ley de los senos, ley de los cosenos y ley de las tangentes.

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos deterministas mediante la aplicación de problemas algebraicos y geométricos para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
2. Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos con situaciones reales.
6. Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
8. Interpreta tablas, gráficos, mapas, textos con símbolos matemáticos y científicos.

Contenidos que aborda la unidad

Contenidos conceptuales

- Definición de trigonometría y relaciones trigonométricas.
- Aplicaciones de las funciones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos.
- Funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud.
- Relaciones numéricas entre las funciones trigonométricas.
- Identidades trigonométricas.
- Relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos (leyes de senos, cosenos y tangentes).

Contenidos procedimentales

- Identificará las diferentes funciones trigonométricas y las relaciones existentes entre sí.
- Resolverá las relaciones numéricas existentes en triángulos rectángulos.
- Aplicará las leyes de senos, cosenos y tangentes.
- Resolverá relaciones numéricas existentes en triángulos oblicuángulos.

Contenidos actitudinales

- Expresará ideas utilizando los conceptos básicos de la geometría.
- Aprenderá a valorar el trabajo de sus compañeros al resolver problemas.
- Argumentará mediante los procesos deductivo e inductivo los axiomas y postulados.
- Contribuirá con ideas de manera crítica y acciones responsables a la hora de trabajar en equipo.

Definición de trigonometría y relaciones trigonométricas

Definición de trigonometría

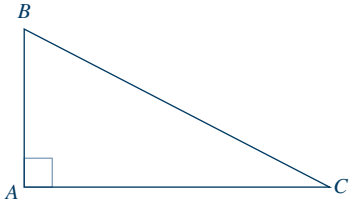
Rama de las matemáticas que estudia las relaciones existentes entre los elementos (lados y ángulos) de un triángulo. Etimológicamente, la palabra **trigonometría** significa **medida de los triángulos**, lo cual se deduce de las raíces griegas: *trigōno*-(triángulo) y *metron*-(medida). Se distinguen dos ramas de la trigonometría.

Trigonometría plana

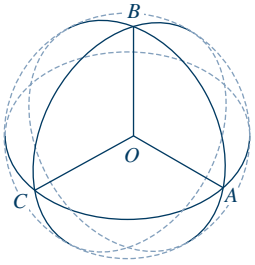
Tiene por objeto el estudio de los triángulos en el plano, sus lados son siempre segmentos de recta, por lo que también se denomina **trigonometría rectilínea**. En ella, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre igual a 180°.

Trigonometría esférica

Tiene por objeto el estudio de los triángulos sobre la superficie de la esfera y a toda figura construida sobre ella por arcos de círculos máximos. En ella, la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es siempre mayor que 180° y menor que 360°.



Trigonometría plana o rectilínea



Trigonometría esférica

Diferencias generales entre la geometría y trigonometría

El objeto de estudio de la geometría son las propiedades de las figuras definidas en el plano, en el espacio y en general en *espacios métricos* donde pueden definirse sus elementos básicos (punto, recta, distancia, superficie).

La trigonometría estudia las relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de los triángulos en el plano, el espacio y en *espacios métricos*. Se basa principalmente en el estudio de las funciones trigonométricas (seno, coseno y las que se definen a partir de ellas: tangente, cotangente, secante, cosecante).

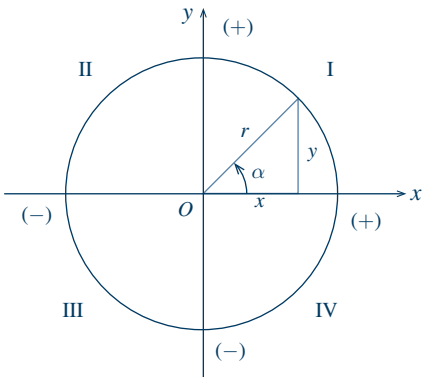
La amplitud de giro en la geometría se considera, por lo general, limitada a un intervalo de una vuelta [0°,360°), mientras que en la trigonometría resulta útil extender el dominio de un ángulo a los números reales.

Las relaciones trigonométricas

La trigonometría se fundamenta en algunas relaciones llamadas funciones trigonométricas, que se definen como *las razones entre elementos rectilíneos ligados a un ángulo, cuya variación depende de la variación del ángulo*.

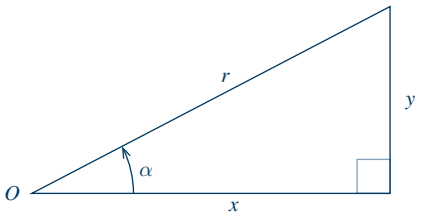
Las funciones trigonométricas en el círculo

La abscisa x, la ordenada y y el radio r forman un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura.



Si sacamos del círculo ese triángulo rectángulo, se tiene:

α ángulo agudo en el triángulo.
r es la hipótenusa del triángulo.
x cateto adyacente al ángulo α.
y cateto opuesto al ángulo α.



Con base en lo anterior, las funciones trigonométricas de un ángulo agudo (α) en un triángulo rectángulo, se definen por:

Seno. Es la razón entre el cateto opuesto a la hipotenusa.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

Coseno. Es la razón entre el cateto adyacente a la hipotenusa.

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

Tangente. Es la razón entre los catetos opuesto al adyacente.

$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{y}{x}$$

Cotangente. Es la razón entre los catetos adyacente al opuesto.

$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{x}{y}$$

Secante. Es la razón entre la hipotenusa al cateto adyacente.

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{r}{x}$$

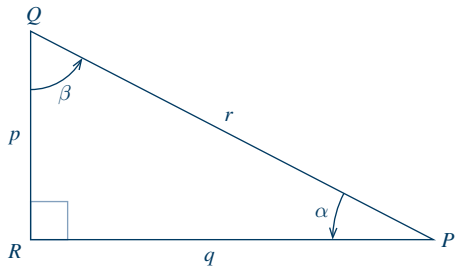
Cosecante. Es la razón entre la hipotenusa al cateto opuesto.

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{r}{y}$$

Estas definiciones se cumplen para cualquier ángulo sin importar en qué cuadrante se ubique.

EJEMPLO

Ejemplo 1 ●●○ En el siguiente triángulo, determina las funciones trigonométricas para cada uno de los ángulos agudos.



Para el ángulo agudo α
p cateto opuesto
q cateto adyacente

Para el ángulo agudo β
q cateto opuesto
p cateto adyacente

Para ambos ángulos r es la hipotenusa.

Funciones trigonométricas para el ángulo agudo a

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{p}{r} \qquad \cot\alpha = \frac{q}{p}$$
$$\cos\alpha = \frac{q}{r} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{q}$$
$$\tan\alpha = \frac{p}{q} \qquad \csc\alpha = \frac{r}{p}$$

Funciones trigonométricas para el ángulo agudo b

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{q}{r} \qquad \cot\beta = \frac{p}{q}$$
$$\cos\beta = \frac{p}{r} \qquad \sec\beta = \frac{r}{p}$$
$$\tan\beta = \frac{q}{p} \qquad \csc\beta = \frac{r}{q}$$

Relaciones de las funciones trigonométricas del ángulo a y el ángulo b, son:

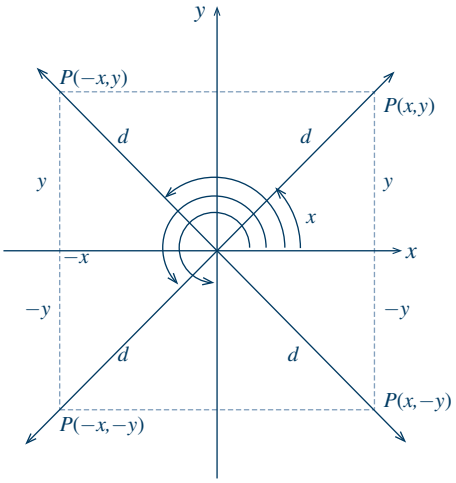
$$\operatorname{sen} a = \cos b \qquad \tan a = \cot b \qquad \sec a = \csc b$$
$$\cos a = \operatorname{sen} b \qquad \cot a = \tan b \qquad \csc a = \sec b$$

El coseno, la cotangente y la cosecante de un ángulo son respectivamente iguales al seno, tangente y secante del ángulo complementario. Por lo anterior, al coseno, la cotangente y la cosecante se les denomina cofunciones.

Definición de las funciones trigonométricas en coordenadas rectangulares

Supongamos el lado inicial de un ángulo en la dirección positiva del eje de las x y su vértice en el origen; tomando un punto cualquiera del lado terminal se traza una perpendicular al eje x, determinando las coordenadas de dicho punto. Repitiendo la suposición anterior en el segundo, tercer y cuarto cuadrantes obtenemos las definiciones generales de las funciones trigonométricas, aplicables a un ángulo cualquiera.

Supongamos un vector o segmento dirigido OP determinado por un cierto ángulo α y una distancia d. Las coordenadas cartesianas del punto $P(x,y)$ quedan determinadas trazando perpendiculares a los ejes x y y.



La proyección sobre el eje x nos permite crear un triángulo rectángulo cuyas medidas de los lados son x, y, d, y que se encuentran relacionadas mediante el teorema de Pitágoras: $d^2 = x^2 + y^2$.

Siendo α el ángulo que se forma a partir del eje x girando en sentido opuesto a las manecillas del reloj, x la abscisa, y la ordenada, d la distancia de $P(x,y)$ al origen.

El **coseno** del ángulo α es el cociente entre la abcisa de P y su distancia al origen. $\cos(\alpha) = \frac{x}{d}$.

El **seno** del ángulo α es el cociente entre la ordenada de P y su distancia al origen. $\text{sen}(\alpha) = \frac{y}{d}$.

La **tangente** del ángulo α es el cociente entre la ordenada y la abcisa de P. $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$.

La **cotangente** del ángulo α es el cociente entre la abcisa y la ordenada de P. $\cot(\alpha) = \frac{x}{y}$.

La **secante** del ángulo α es el cociente entre la distancia de P al origen y la abcisa. $\sec(\alpha) = \frac{x}{d}$.

La **cosecante** del ángulo α es el cociente entre la distancia de P al origen y la ordenada. $\csc(\alpha) = \frac{y}{d}$.

EJERCICIO 38

I. En tu cuaderno, contesta las siguientes preguntas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

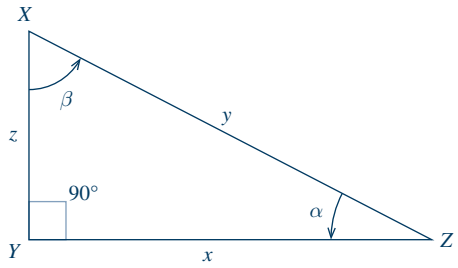
Competencias disciplinares

1. ¿Qué estudia la trigonometría?
2. Etimológicamente ¿qué significa trigonometría?
3. ¿Qué es la trigonometría plana?
4. ¿Cuál es el objetivo de la trigonometría esférica?
5. Escribe dos diferencias entre la geometría y la trigonometría.
6. Nombra las funciones trigonométricas.
7. Define las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

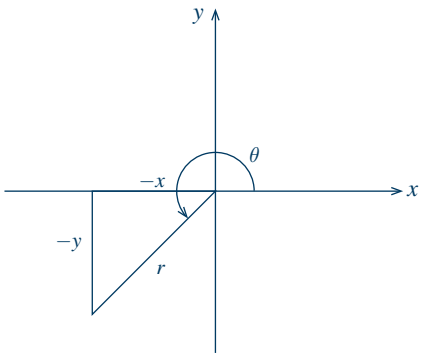
8. Define las funciones trigonométricas en coordenadas rectangulares, aplicables a un ángulo cualquiera.
9. ¿Cúales son las cofunciones trigonométricas?

II. Resuelve los siguientes ejercicios prácticos.

1. Dado el siguiente triángulo rectángulo, determina las funciones trigonométricas para cada uno de los ángulos agudos indicados.



2. Determina las funciones trigonométricas en coordenadas rectangulares para el ángulo señalado en la gráfica.



III. Realiza las siguientes investigaciones y en plenaria discute tus respuestas.

1. Investiga qué son y para qué sirven las funciones trigonométricas de seno verso y coseno verso.
2. Investiga el proceso de representar gráficamente las siguientes funciones trigonométricas:
   a) sinusoide
   b) cosinusoide
   c) tangetoide

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Aplicaciones de las funciones trigonométricas en la resolución de triángulos rectángulos

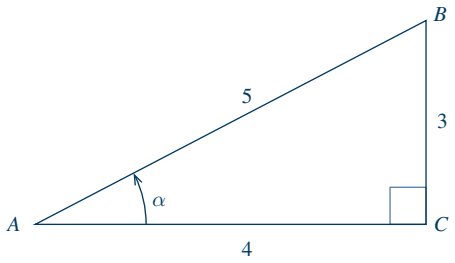
Primera aplicación

Dadas las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, determina las funciones trigonométricas del ángulo señalado en la siguiente figura.

EJEMPLOS

Ejemplos

a)



$\alpha =$ ángulo agudo del $\triangle ABC$

$3 =$ cateto opuesto

$4 =$ cateto adyacente

$5 =$ hipotenusa

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

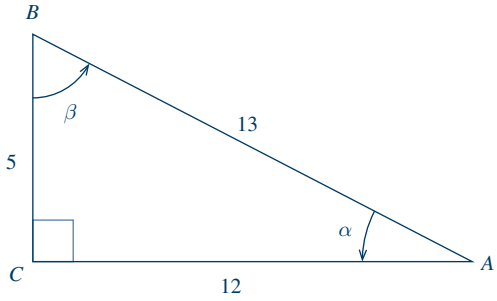
$$\tan\alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{4}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{5}{4}$$

$$\csc\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{5}{3}$$

b)



$\alpha =$ ángulo agudo del ΔABC.
5 cateto opuesto a α, 12 cateto adyacente a α.
12 cateto opuesto a β, 5 cateto adyacente a β.
13 hipotenusa para ambos ángulos.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13}$$

$$\cos\alpha = \frac{12}{13} \qquad \cos\beta = \frac{5}{13}$$

$$\tan\alpha = \frac{5}{12} \qquad \tan\beta = \frac{12}{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{12}{5} \qquad \cot\beta = \frac{5}{12}$$

$$\sec\alpha = \frac{13}{12} \qquad \sec\beta = \frac{13}{5}$$

$$\csc\alpha = \frac{13}{5} \qquad \csc\beta = \frac{13}{12}$$

$\therefore$ La relación de las funciones del α y β son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

$$\csc\alpha = \sec\beta$$

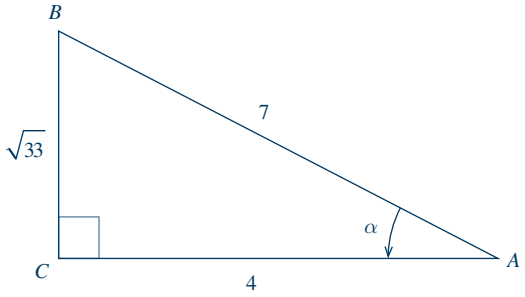
Segunda aplicación

Dado el valor de una función trigonométrica para determinar los valores de las demás funciones, se emplea el teorema de Pitágoras que permite completar las longitudes de los lados del triángulo.

EJEMPLOS

Ejemplos

a) Si la $\sec\alpha = \frac{7}{4}$, calcula las otras funciones trigonométricas del mismo ángulo.



$$\sec\alpha = \frac{7}{4} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}}$$

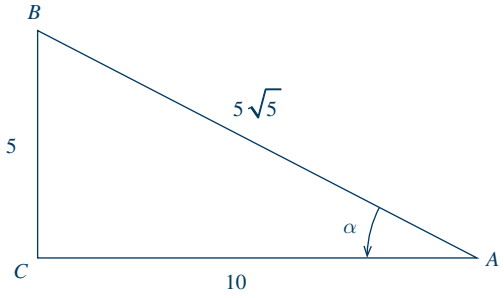
$$\text{opuesto} = \sqrt{(\text{HIP})^2 - (\text{ADY})^2}$$
$$\text{OP} = \sqrt{49-16} = \sqrt{33}$$

} aplicación del teorema de Pitágoras

$\therefore$ Las funciones buscadas son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{33}}{7} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{33}}{4} \qquad \sec\alpha = \frac{7}{4}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{7} \qquad \cot\alpha = \frac{4}{\sqrt{33}} \qquad \csc\alpha = \frac{7}{\sqrt{33}}$$

b) Si la $\tan\alpha = \frac{5}{10}$, calcula las otras funciones trigonométricas del mismo ángulo.



$$\tan\alpha = \frac{5}{10} = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\text{HIP} = \sqrt{(\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2}$$
$$\text{HIP} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125}$$
$$\text{HIP} = \sqrt{25(5)} = 5\sqrt{5}$$

} aplicación del teorema de Pitágoras

$\therefore$ Las funciones buscadas son:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \tan\alpha = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \sec\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\cos\alpha = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cot\alpha = \frac{10}{5} = 2 \qquad \csc\alpha = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

Uso de las tablas de valores naturales

La tabla que se encuentra en el apéndice A se emplea para resolver:

a) Dada la función y el ángulo, encontrar el valor natural.
b) Dada la función y el valor natural, encontrar el valor del ángulo.

Para encontrar el valor natural de una función trigonométrica, consideremos los siguientes casos:

1. Encuentra el valor del sen 25°.

   En la tabla del apéndice A, en la función **seno natural**, se localiza en la columna ***N*** el valor de 25° y en el mismo renglón en la columna de 0′ se encuentra el valor 0.4226. Por lo tanto, el **sen 25° = 0.4226**.

2. Encuentra el valor del cos 73°40′.

   En la tabla del apéndice A, en la función **coseno natural**, se localiza en la columna ***N*** el valor de 73° y en el mismo renglón en la columna de 40′ se encuentra el valor 0.2812. Por lo tanto, el **cos 73°40′ = 0.2812**.

3. Encuentra el valor de la tan 57°26′.

   En la tabla del apéndice A, en la función **tangente natural**, se localiza en la columna ***N*** el valor de 57° y en el mismo renglón en la columna de 20′ se encuentra el valor 1.560; se sigue por el mismo renglón hasta la columna de partes proporcionales (observando que entre paréntesis dice: **se suman)** en el encabezado de 6′, donde se encuentra el número 6 que es del mismo orden decimal que los valores escritos en las columnas de las decenas de minutos; la suma de los dos valores encontrados darán el resultado de la función buscada.

   $$\begin{array}{r} 1.560 \\ +\ 0.006 \\ \hline 1.566 \end{array}$$

   Por lo tanto, la **tan 57°26′ = 1.566**.

4. Encuentra el valor de la cot 49°35′.

   En la tabla del apéndice A, en la función **cotangente natural**, se localiza en la columna ***N*** el valor de 49° y en el mismo renglón en la columna de 30′ se encuentra el valor 0.8541; se sigue por el mismo renglón hasta la columna de partes proporcionales (observando que entre paréntesis dice: **se restan**) en el encabezado de 5′, donde se encuentra el número 25 que es del mismo orden decimal que los valores escritos en las columnas de las decenas de minutos; restando 25 de 0.8541 se encuentra el valor de la función.

   $$\begin{array}{r} 0.8541 \\ -\ 0.0025 \\ \hline 0.8516 \end{array}$$

   Por lo tanto, la **cot 49°35′ = 0.8516**.

Para encontrar el valor del ángulo de una función trigonométrica, consideremos los siguientes casos:

1. Dado sen $\alpha = 0.5995$, encuentra el valor del ángulo α.

   En la tabla del apéndice A, en la función **seno natural**, se busca en la columna de 0′ hasta localizar el valor inferior más próximo al dado, el cual es 0.5878 que está en el renglón de 36°; se sigue por ese

renglón hasta localizar el valor 0.5995 que se encuentra en la columna de 50′. Por lo tanto, el **ángulo $\alpha = 36°$ a 50′**.

2. Dado cos $\beta = 0.9253$, encuentra el valor del ángulo β.

   En la tabla del apéndice A, en la función **coseno natural**, se busca en la columna de 0′ hasta localizar el valor superior más próximo al dado, el cual es 0.9272 que está en el renglón de 22°; se sigue por ese renglón hasta localizar el valor inferior más próximo al dado, encontrándose 0.9250 en la columna que corresponde a 20′; se determina la diferencia entre el valor dado 0.9253 y el último valor encontrado de 0.9250, resultando una diferencia de 3 que se busca en el mismo renglón en las columnas de partes proporcionales, localizándose en la columna de 3′; restando los 3′ a 20′, se obtiene 17′, por lo tanto, **el ángulo $\beta = 22°17'$**.

3. Dada la tan $\theta = 1.854$, encuentra el valor del ángulo θ.

   En la tabla del apéndice A, en la función **tangente natural**, se busca el valor inferior más próximo al dado en la columna de 0′, el cual es 1.804 que está en el renglón de 61°; se sigue por ese renglón hasta localizar el valor inferior más próximo al dado, encontrándose 1.842 en la columna que corresponde a 30′, se determina la diferencia entre el valor dado 1.854 y el último valor encontrado de 1.842, resultando una diferencia de 12 que se busca en el mismo renglón en las columnas de partes proporcionales, localizándose en la columna de 9′; sumando los 9′ a los 30′, se obtiene 39′, por lo tanto, el **ángulo $\theta = 6l°39'$**.

4. Dada la cot $\alpha = 0.2086$, encuentra el valor del ángulo α.

   En la tabla del apéndice A, en la función **cotangente natural**, se busca en la columna de 0′ hasta localizar el valor superior más próximo al dado, el cual es 0.2126 que está en el renglón de 78°; se sigue por ese renglón hasta localizar el valor inferior más próximo al dado, encontrándose 0.2065 en la columna que corresponde a 20′; se determina la diferencia entre el valor dado 0.2086 y el último valor encontrado de 0.2065, resultando una diferencia de 21 que se busca en el mismo renglón en las columnas de partes proporcionales, localizándose en la columna de7′; restando los 7′ a 20′, se obtiene 13′, por lo tanto, el **ángulo $\alpha = 78°13'$**.

Funciones trigonométricas inversas

La expresión $\text{sen}^{-1}x$ se denomina **seno inverso de *x***, **antiseno de *x*** y también **arcoseno de *x***, que significa el **ángulo cuyo seno es *x***.

Si establecemos que el seno del ángulo x es igual a y, es decir: sen $x = y$ o $x = \text{sen}^{-1}y$.

Las funciones trigonométricas son:

$\text{sen}^{-1}x$	o	$\text{arcsen}\,x$
$\cos^{-1}x$	o	$\text{arccos}\,x$
$\tan^{-1}x$	o	$\text{arctan}\,x$
$\cot^{-1}x$	o	$\text{arccot}\,x$
$\sec^{-1}x$	o	$\text{arcsec}\,x$
$\csc^{-1}x$	o	$\text{arccsc}\,x$

Las funciones trigonométricas inversas se aplican en la determinación del valor del ángulo de una función trigonométrica, cuando se conoce su valor natural. Por ejemplo, dada la tan $\gamma = 1.854$, se determina con base la definición de funciones trigonométricas inversas que se han dado: $\gamma = \arctan 1.854$.

Tercera aplicación

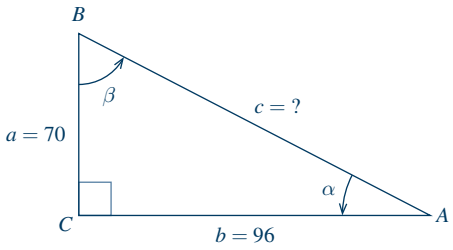
En este caso se emplean las tablas de funciones trigonométricas para determinar:

a) La función trigonométrica cuando el ángulo es conocido.
b) El valor del ángulo cuando se conoce la función trigonométrica.

Para resolver problemas hay que observar qué función relaciona los datos y la variable.

EJEMPLOS

Ejemplos 1 Conocidos los catetos opuesto ($a = 70$) y adyacente ($b = 96$), encuentra los elementos restantes y determina las funciones trigonométricas de los dos ángulos agudos.



Datos

$a = BC = 70$

$b = AC = 96$

$c = AB = ?$

$\gamma = 90°$

$\alpha = ?$

$\beta = ?$

Por el teorema de Pitágoras

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{(70)^2 + (96)^2}$

$c = \sqrt{14116}$

$c = 118.81$

Con base en los datos obtenemos α

$$\tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{70}{96}$$

$\tan \alpha = 0.7291$

$\alpha = \arctan(0.7291)$

$\alpha = 36°05'54''$

Con base en los datos obtenemos β

$$\tan \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{96}{70}$$

$\tan \beta = 1.3714$

$\beta = \arctan(1.3714)$

$\beta = 53°54'06''$

Los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$36°05'54'' + 53°54'06'' + 90° = 180°$

$\therefore \quad 180° = 180°$

Funciones trigonométricas de α

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{70}{118.81} \qquad \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{70}{96} \qquad \sec \alpha = \frac{AB}{AC} = \frac{118.81}{96}$$

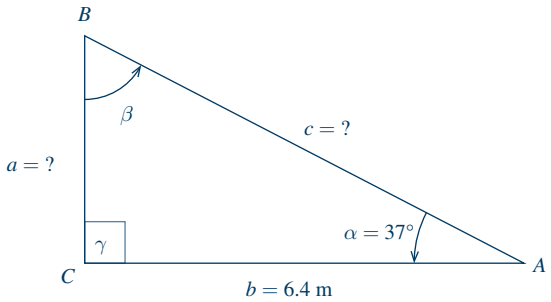
$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{96}{118.81} \qquad \cot \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{96}{70} \qquad \csc \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{118.81}{70}$$

Funciones trigonométricas del ángulo β

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{BC}{AB} = \frac{96}{118.81} \qquad \tan\beta = \frac{BC}{AC} = \frac{96}{70} \qquad \sec\beta = \frac{AB}{AC} = \frac{118.81}{70}$$

$$\cos\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{70}{118.81} \qquad \cot\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{70}{96} \qquad \csc\beta = \frac{AB}{BC} = \frac{118.81}{96}$$

2 ●●• El cateto adyacente al ángulo α de 37° mide 6.4 m. Encuentra el valor de las demás funciones trigonométricas para dicho ángulo, así como el ángulo faltante para la suma de 180°.



Datos

$b = AC = 6.4$ m

$\alpha = 37$

$\gamma = 90°$

$a = ?$

$c = ?$

$\beta = ?$

Fórmulas

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

Sustitución

$$\tan 37° = \frac{a}{6.4\text{m}}$$

$$a = (\tan 37°)(6.4\text{ m})$$

$$a = (0.7535)(6.4\text{ m})$$

$$a = 4.8227\,\text{m}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4.8227}{8.0136}$$

$$\cos\alpha = \frac{6.4}{8.0136}$$

$$c = \sqrt{(4.8227)^2 + (6.4)^2}$$

$$c = \sqrt{23.258 + 40.96}$$

$$c = \sqrt{64.2188}$$

$$c = 8.0136\text{ m}$$

$$\tan\alpha = \frac{4.8227}{6.4}$$

$$\cot\alpha = \frac{6.4}{4.8227}$$

$$37° + \beta + 90° = 180°$$

$$\beta = 180° - 90° - 37°$$

$$\beta = 53°$$

$$\sec\alpha = \frac{8.0136}{6.4}$$

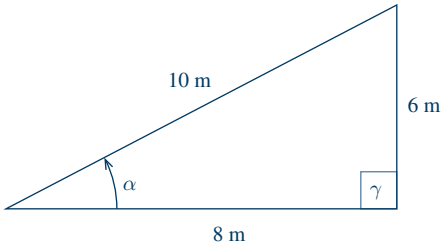
$$\csc\alpha = \frac{8.0136}{4.8227}$$

EJERCICIO 39

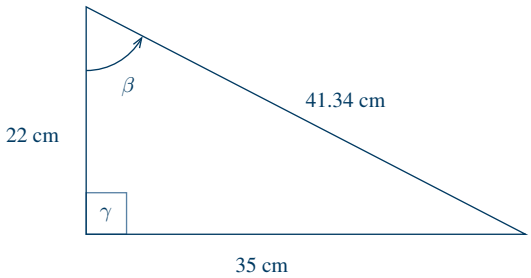
I. Resuelve los siguientes problemas.

1. Dadas las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, determina las funciones trigonométricas del ángulo que se muestra en la siguiente figura.

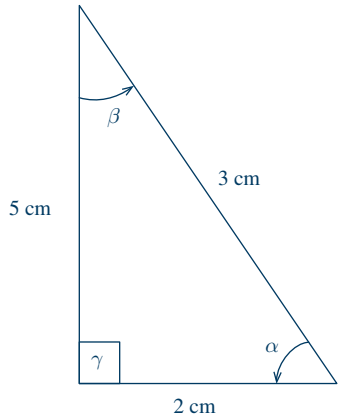
a)



b)



c)



2. Dados los valores de las siguientes funciones trigonométricas, determina los valores de las demás funciones, indicando en un triángulo rectángulo la longitud faltante.

a) $\tan\alpha = \frac{3}{2}$

b) $\sec\beta = \frac{12}{5}$

c) $\operatorname{sen}\gamma = \frac{2}{5}$

d) $\cos\alpha = \frac{17}{55}$

e) $\csc\beta = \frac{18}{4}$

f) $\cot\gamma = \frac{9}{7}$

3. Determina mediante el uso de las tablas de valores naturales las siguientes funciones trigonométricas.

a) sen 13° = _____

b) sen 48°27′ = _____

c) cos 29° = _____

d) cos 56°34′ = _____

e) tan 17° = _____

f) tan 75°35′ = _____

g) cot 9° = _____

h) cot 36°28′ = _____

i) sen 72°43′ = _____

j) cos 88°13′ = _____

k) tan 35°49′ = _____

l) cot 66°14′ = _____

m) sen 34° = _____

n) cos 36°20′ = _____

o) tan 84° = _____

4. Determina mediante el uso de las tablas de valores naturales el valor del ángulo para las siguientes funciones trigonométricas.

a) sen $\alpha = 0.7531$, entonces α = _____

b) cos $\beta = 0.3275$, entonces β = _____

c) tan $\gamma = 4.293$, entonces γ = _____

d) cot $\delta = 0.8754$, entonces δ = _____

e) cos $\varphi = 0.8348$, entonces φ = _____

f) cot $\theta = 13.954$, entonces θ = _____

g) sen $\varepsilon = 0.6802$, entonces ε = _____

h) tan $\tau = 42.960$, entonces τ = _____

i) cos $\phi = 0.5926$, entonces ϕ = _____

j) sen $\omega = 0.1948$, entonces ω = _____

5. Conocidos los catetos de un triángulo rectángulo, determina los elementos restantes y las funciones trigonométricas de los dos ángulos agudos:

   a) opuesto = 25

   adyacente = 40

   b) opuesto = 2.6

   adyacente = 9.3

   c) opuesto = 12

   adyacente = 15

6. Conocida la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo, determina los elementos restantes y las funciones trigonométricas para el ángulo agudo de mayor valor.

   a) hipotenusa = 25

   opuesto = 4

   b) hipotesusa = 53

   adyacente = 47

   c) hipotenusa = 8

   opuesto = 3

7. Conocida la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo, determina los elementos restantes y las funciones trigonométricas para el ángulo agudo de menor valor.

   a) hipotenusa = 50

   adyacente = 30

   b) hipotenusa = 175

   opuesto = 83

   c) hipotenusa = 45

   adyacente = 24

8. Dados el cateto adyacente y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, determina los elementos restantes y las funciones trigonométricas para el ángulo dado.

   a) adyacente $= 40$

   ángulo agudo $= 32°$

   b) adyacente $= 15$

   ángulo agudo $= 56°22'$

   c) adyacente $= 12$

   ángulo agudo $= 18°49'$

9. Dados la hipotenusa y un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, determina los elementos restantes y las funciones trigonométricas para el ángulo dado.

   a) hipotenusa $= 16$

   ángulo agudo $= 62°45'$

   b) hipotenusa $= \sqrt{13}$

   ángulo agudo $= 70°$

   c) hipotenusa $= 4.35$

   ángulo agudo $= 27°17'$

II. Resuelve los siguientes problemas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Un albañil tiene que construir una escalera de 18 m. ¿Qué ángulo debe formar con el piso, si tiene que alcanzar una altura de 8 m?

2. El pie de una escalera de 12 m, apoyada contra una pared, queda a 5 m de ésta, suponiendo que el suelo es horizontal, ¿qué ángulo forma la escalera con el suelo?

3. El ángulo en la base de un triángulo isósceles es 40° su altura es de 22 cm. Calcula la longitud de sus lados iguales.

4. Una cuerda subtiende un arco de 52°, ¿cuál es la longitud de su flecha, si el radio es de $5\sqrt{2}$ cm

5. Un buque navega de un punto P hacia el noreste y llega a un punto A distante 125 millas de P. ¿A qué distancia $\overline{AB}$ se encuentra de la dirección norte-sur del punto de partida?

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

III. Realiza las siguientes investigaciones y en plenaria discute tus respuestas.

1. De qué manera se podría determinar el valor natural para las funciones trigonométricas de la secante y la cosecante.

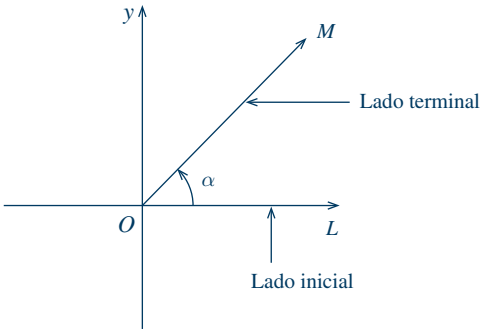
2. ¿Cómo se determina el ángulo de las funciones **secante** y **cosecante**, cuando se conoce su valor natural?

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud

El ángulo de cualquier magnitud

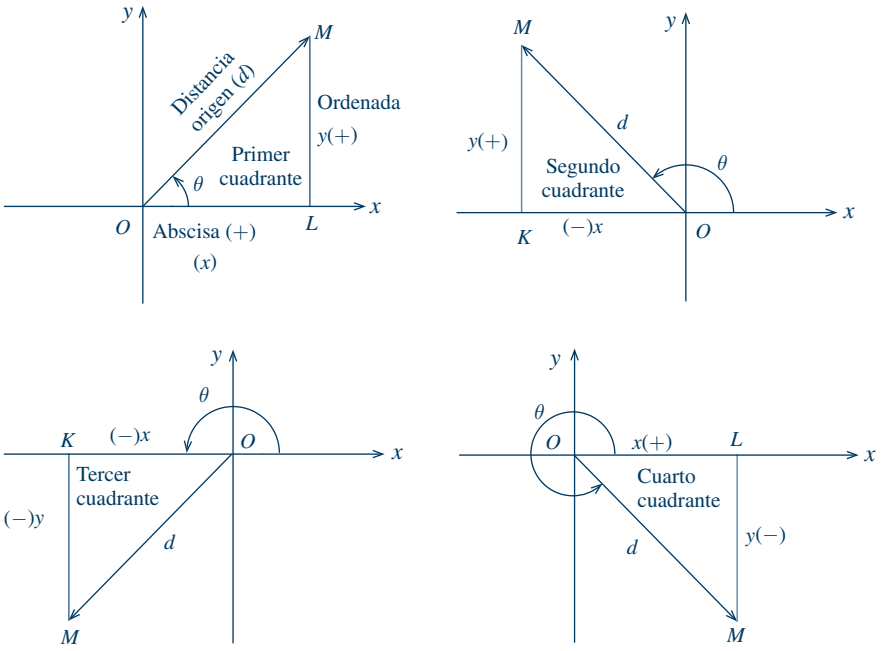
Consideremos una recta $\overrightarrow{OM}$ girando alrededor de un punto fijo O que pertenece también a otra recta $\overrightarrow{KL}$.



El giro de $\overrightarrow{OM}$, desde su posición original $\overrightarrow{OL}$ da lugar a la abertura, que se denomina **ángulo** α; el lado del ángulo, a partir del cual empieza el giro angular, se llama **lado inicial** y al lado cuyo movimiento genera al ángulo y determina su magnitud por la posición que ocupa al obtenerse el giro, recibe el nombre de **lado terminal**.

Se establece que un ángulo pertenece a un determinado cuadrante cuando su lado terminal detiene su giro en dicho cuadrante; en el caso en que coincida con los ejes a 90°, 180°, 270° y 360°, se establece que el ángulo es límite de dos cuadrantes.

En las siguientes figuras se representa a los ángulos que tienen su lado terminal en el primero, segundo, tercer y cuarto cuadrantes; consideremos sus coordenadas horizontal y vertical, así como la distancia de un punto en el lado terminal hacia el origen, dando lugar a la formación de un triángulo de referencia para cada ángulo.

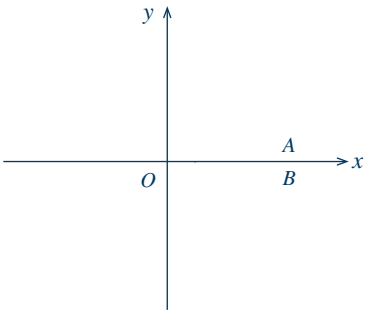


Signos de las funciones trigonométricas

Los signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes de los ejes de coordenadas son:

Función	Cuadrantes			
	I	II	III	IV
Seno	+	+	−	−
Coseno	+	−	−	+
Tangente	+	−	+	−
Cotangente	+	−	+	−
Secante	+	−	−	+
Cosecante	+	+	−	−

Funciones trigonométricas de los ángulos que limitan a los cuadrantes (0°, 90°, 180°, 270°, 360°):



Se observa que la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ coincide con la semirrecta $\overrightarrow{OB}$ en el semieje $\overrightarrow{Ox}$, tenemos que:

$\alpha = 0°$, $\overline{AB} = O \quad \therefore \ \overline{OA} = \overline{OB}$

$\overline{AB}$ = cateto opuesto

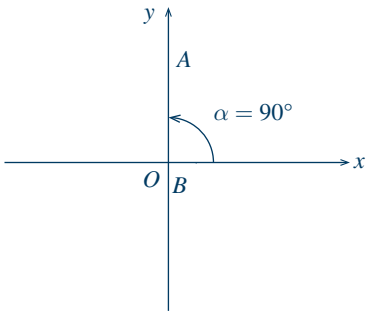
$\overline{OB}$ = cateto adyacente

$\overline{OA}$ = hipotenusa

Los valores de las funciones son:

$$\operatorname{sen} 0° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{O}{\overline{OA}} = 0 \qquad \tan 0° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{O}{70} = 0 \qquad \sec 0° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} = 1$$

$$\cos 0° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1 \qquad \cot 0° = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{O} = \infty \qquad \csc 0° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{O} = \infty$$



Haciendo girar la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ de manera que coincida con el semieje $\overrightarrow{Oy}$, se tiene:

$\alpha = 90°$, $\overline{OB} = 0 \quad \therefore \quad \overline{AB} = \overline{OA}$

$\overline{AB}$ = cateto opuesto

$\overline{OB}$ = cateto adyacente

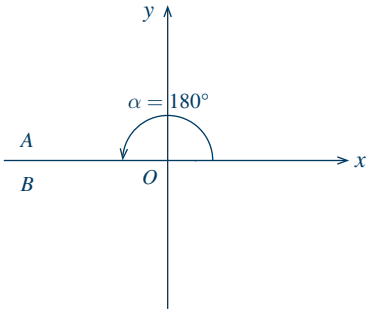
$\overline{OA}$ = hipotenusa

Los valores de las funciones son:

$$\operatorname{sen} 90° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1 \qquad \cot 90° = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{O}{\overline{AB}} = 0$$

$$\cos 90° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{O}{\overline{OA}} = 0 \qquad \sec 90° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{O} = \infty$$

$$\tan 90° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{96}{O} = \infty \qquad \csc 90° = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = 1$$



Si el giro de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ continúa hasta que coincide con el semieje $\overrightarrow{Ox}$, se tiene:

$\overline{OB}$ es de signo negativo; $\alpha = 180°$,

$\overline{AB} = 0 \quad \therefore \quad \overline{OA} = \overline{OB}$.

$\overline{AB}$ = cateto opuesto

$\overline{OB}$ = cateto adyacente

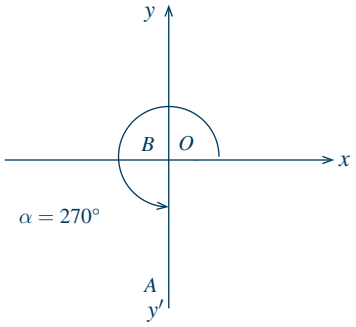
$\overline{OA}$ = hipotenusa

Los valores de las funciones son:

$$\operatorname{sen} 180° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{O}{\overline{OA}} = 0 \qquad \cot 180° = \frac{-\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{-\overline{OB}}{O} = \text{indeterminación}$$

$$\cos 180° = \frac{-\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{OB}}{\overline{OB}} = -1 \qquad \sec 180° = \frac{\overline{OA}}{-\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{-\overline{OB}} = -1$$

$$\tan 180° = \frac{\overline{AB}}{-\overline{OB}} = \frac{O}{-\overline{OB}} = 0 \qquad \csc 180° = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{O} = \infty$$



Continuando con el giro de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ hasta que coincida con el semieje $\overrightarrow{Oy'}$, se tiene: $\overline{AB}$ es de signo negativo;

$\alpha = 270°, \overline{OB} = 0 \quad \therefore \ \overline{AB} = \overline{OA}.$

$\overline{AB}$ = cateto opuesto

$\overline{OB}$ = cateto adyacente

$\overline{OA}$ = hipotenusa

Los valores de las funciones son:

$$\operatorname{sen} 270° = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{-\overline{AB}}{\overline{AB}} = -1$$

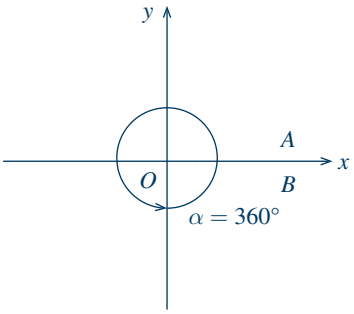
$$\cos 270° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{O}{\overline{OA}} = 0$$

$$\tan 270° = \frac{-\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{-\overline{AB}}{O} = \infty$$

$$\cot 270° = \frac{\overline{OB}}{-\overline{AB}} = \frac{O}{-\overline{AB}} = 0$$

$$\sec 270° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{O} = \infty$$

$$\csc 270° = \frac{\overline{OA}}{-\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{-\overline{AB}} = -1$$



Continuando el giro de la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ hasta que coincida con el semieje $\overrightarrow{Ox}$, tenemos que las funciones trigonométricas de este ángulo son iguales a las funciones de $\alpha = 0°$.

$\sphericalangle \alpha = 360°, \overline{AB} = 0 \quad \therefore \quad \overline{OA} = \overline{OB}$

$\overline{AB}$ = cateto opuesto

$\overline{OB}$ = cateto adyacente

$\overline{OA}$ = hipotenusa

Los valores de las funciones son:

$$\operatorname{sen} 360° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{O}{\overline{OA}} = 0$$

$$\cos 360° = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OA}} = 1$$

$$\tan 360° = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{O}{\overline{OB}} = 0$$

$$\cot 360° = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OB}}{O} = \infty$$

$$\sec 360° = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OB}} = 1$$

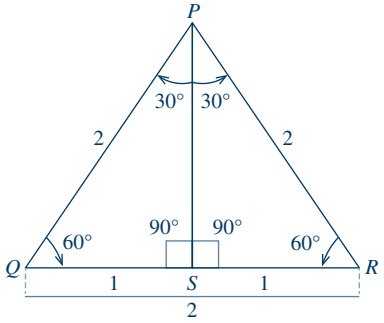
$$\csc 360° = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA}}{O} = \infty$$

Resumen de los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que limitan los cuadrantes

Función	0°	90°	180°	270°	360°
Seno	0	1	0	−1	0
Coseno	1	0	−1	0	1
Tangente	0	∞	0	∞	0
Cotangente	∞	0	∞	0	∞
Secante	1	∞	−1	∞	1
Cosecante	∞	1	∞	−1	∞

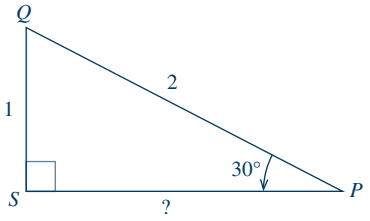
Funciones trigonométricas de ángulos notables en el primer cuadrante (30°, 45°, 60°)

Sea $\triangle PQR$ un triángulo equilátero, en donde la longitud de cada uno de sus lados al trazar su altura es igual a 2 unidades; se obtienen dos triángulos rectángulos:



Tomando como referencia el triángulo PQS y el ángulo de 30°, para determinar las funciones trigonométricas se tiene:

PQ = Hipotenusa = 2
QS = Opuesto = 1
PS = Adyacente = ?



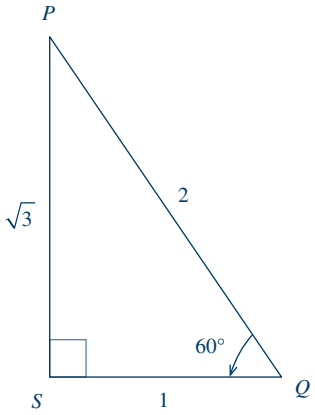
Por el teorema de Pitágoras:

$$PS = \sqrt{(PQ)^2 - (QS)^2}$$
$$PS = \sqrt{(2)^2 - (1)^2}$$
$$PS = \sqrt{4 - 1}$$
$$PS = \sqrt{3}$$

Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 30°:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$
$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 30° = \frac{2}{1} = 2$$

Asimismo, para determinar las funciones trigonométricas tomando como referencia el triángulo *PQS* y un ángulo de 60°, se tiene:



hipotenusa $= 2$

opuesto $= \sqrt{3}$

adyacente $= 1$

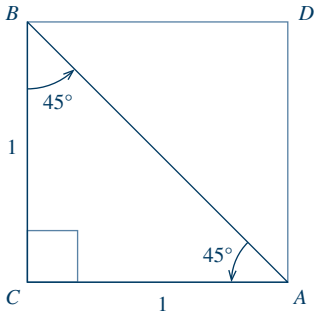
Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 60°:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \sec 60° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para determinar los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo de 45°, se considera el triángulo *ABC* que se forma al trazar la diagonal *AB* en un cuadrado de lados iguales a la unidad; dando lugar a las siguientes características (ver figura).



$\overline{AB}$ = Hipotenusa = ?

$\overline{CB}$ = Opuesto = 1

$\overline{AC}$ = Adyacente = 1

Por el teorema de Pitágoras:

$$AB = \sqrt{(CB)^2 + (AC)^2}$$

$$AB = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{2}$$

Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 45°:

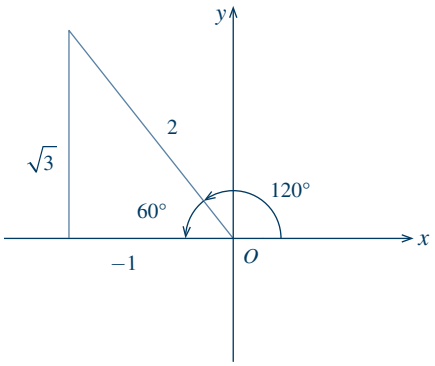
$$\operatorname{sen} 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tan 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 45° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Funciones trigonométricas de ángulos notables en el segundo cuadrante (120°, 135°, 150°)

Si en un sistema de coordenadas rectangulares se traza un triángulo rectángulo en el segundo cuadrante, su lado adyacente (base) sobre el eje x y su ángulo agudo de 60°se verán tal como se indica en la siguiente figura.

Hipotenusa $= 2$
Opuesto $= \sqrt{3}$
Adyacente $= -1$



Funciones trigonométricas para ángulo igual a 120°:

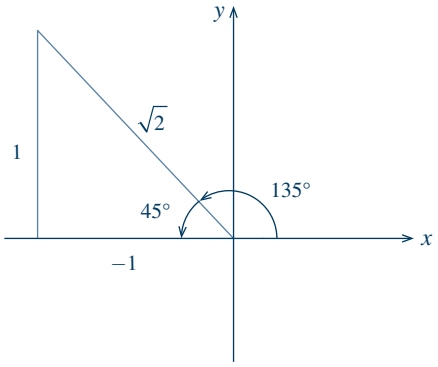
$$\operatorname{sen}120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 120° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 120° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \sec 120° = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \qquad \csc 120° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Trazando en el mismo cuadrante (segundo) el triángulo rectángulo con ángulo base de 45°, se tiene:

Hipotenusa $= \sqrt{2}$
Opuesto $= 1$
Adyacente $= -1$



Funciones trigonométricas para ángulo igual a 135°:

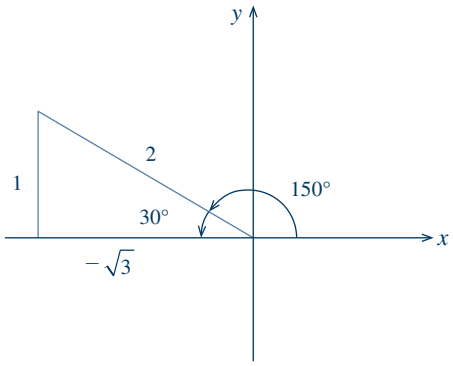
$$\operatorname{sen}135° = \frac{1}{2} \qquad \cot 135° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 135° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\tan 135° = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \csc 135° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Trazando en el segundo cuadrante el triángulo rectángulo con ángulo base de 30°, se tiene:

Hipotenusa $= 2$
Opuesto $= 1$
Adyacente $= -\sqrt{3}$



Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 150°:

$$\operatorname{sen} 150° = \frac{1}{2} \qquad \cot 150° = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

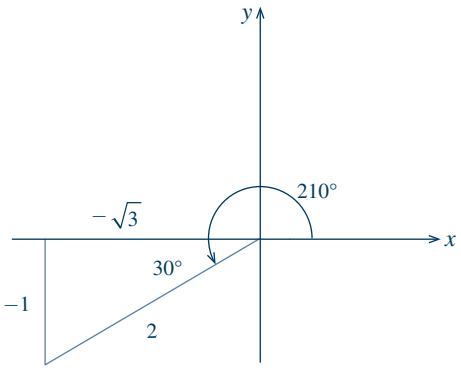
$$\cos 150° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 150° = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 150° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 150° = \frac{2}{1} = 2$$

Funciones trigonométricas de ángulos notables en el tercer cuadrante (210°, 225°, 240°)

Si en el tercer cuadrante de un sistema de coordenadas rectangulares, aplicamos el procedimiento empleado para el segundo cuadrante, se tiene:

Hipotenusa $= 2$
Opuesto $= -1$
Adyacente $= -\sqrt{3}$



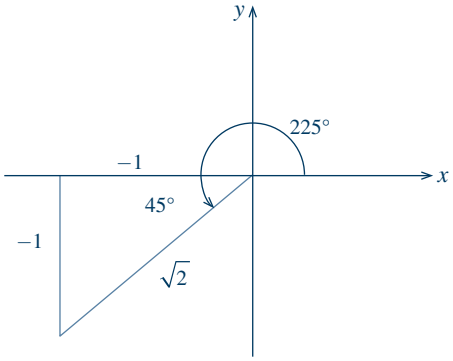
Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 210°:

$$\operatorname{sen} 210° = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \cot 210° = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\cos 210° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 210° = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 210° = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 210° = \frac{2}{-1} = -2$$

Hipotenusa $= \sqrt{2}$
Opuesto $= -1$
Adyacente $= -1$



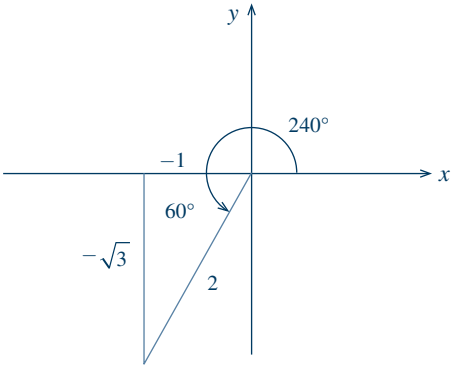
Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 225°:

$$\operatorname{sen} 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 225° = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cos 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 225° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\tan 225° = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad \csc 225° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Hipotenusa $= 2$
Opuesto $= -\sqrt{3}$
Adyacente $= -1$



Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 240°:

$$\operatorname{sen} 240° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 240° = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

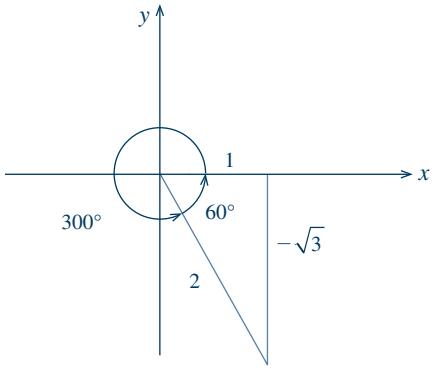
$$\cos 240° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \sec 240° = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\tan 240° = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \qquad \csc 240° = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Funciones trigonométricas de ángulos notables en el cuarto cuadrante (300°, 315°, 330°)

Empleando el mismo procedimiento, aplicado para el segundo y tercer cuadrantes, ahora determinemos las funciones trigonométricas en el cuarto cuadrante del sistema de coordenadas rectangulares.

Hipotenusa $= 2$
Opuesto $= -\sqrt{3}$
Adyacente $= 1$



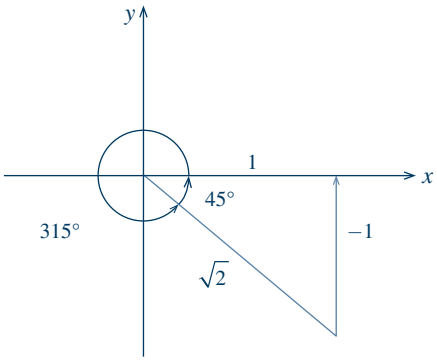
Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 300°:

$$\operatorname{sen} 300° = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 300° = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 300° = \frac{1}{2} \qquad \sec 300° = \frac{2}{1} = 2$$

$$\tan 300° = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \qquad \csc 300° = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Hipotenusa $= \sqrt{2}$
Opuesto $= -1$
Adyacente $= 1$



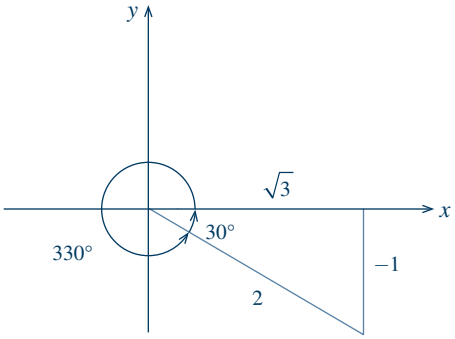
Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 315°:

$$\operatorname{sen} 315° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cot 315° = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \sec 315° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\tan 315° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \csc 315° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Hipotenusa $= 2$
Opuesto $= -1$
Adyacente $= \sqrt{3}$



Funciones trigonométricas para un ángulo igual a 330°:

$$\operatorname{sen} 330° = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \cot 330° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

$$\cos 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 330° = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\tan 330° = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \csc 330° = \frac{2}{-1} = -2$$

EJERCICIO **40**

I. Resuelve los siguientes problemas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Con auxilio de los triángulos rectángulos, determina las funciones trigonométricas de ángulos del primer cuadrante de un sistema coordenado:

   a) para un ángulo igual a 30°:

   b) para un ángulo igual a 45°:

   c) para un ángulo igual a 60°:

2. Determina y elabora la gráfica correspondiente de la función seno, coseno y tangente para cada uno de los siguientes ángulos:

   a) 120°

b) 150°

c) 240°

d) 300°

3. Determina y elabora la gráfica correspondiente de la función cotangente, secante y cosecante para cada uno de los siguientes ángulos:

a) 135°

b) 210°

c) 315°

d) 330°

4. Escribe los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que limitan a los cuadrantes.

a) sen 90° =

b) cos 270° =

c) tan 360° =

d) cot 180° =

e) sec 360° =

f) csc 90° =

g) sen 0° =

h) tan 90° =

i) sec 270° =

5. Explica gráficamente cómo se determinan los signos de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes de los ejes de coordenadas.

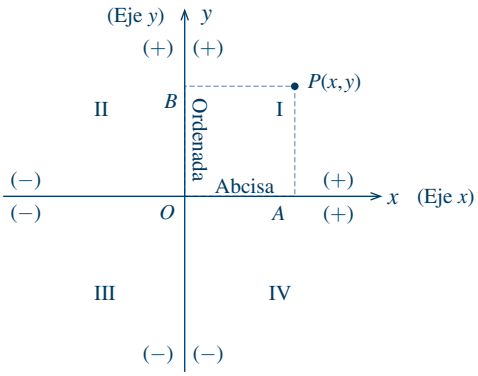
Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Relaciones numéricas entre las funciones trigonométricas

Al determinar las funciones trigonométricas para un ángulo de cualquier magnitud, se hicieron con base en el sistema de coordenadas rectangulares.

Sistema de coordenadas rectangulares

Consta de dos rectas dirigidas, perpendiculares entre sí llamadas **ejes de coordenadas**. La recta horizontal recibe el nombre de **eje *x***, la recta vertical recibe el nombre de **eje *y***; el punto donde se intersecan ambas rectas es el **origen del sistema** (ver figura).



Sistema de coordenadas rectangulares

Estos ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas **cuadrantes**. Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema rectangular; se traza $\overline{PA}$ perpendicular al eje x y $\overline{PB}$ perpendicular al eje y, la longitud del segmento dirigido $\overline{OA}$ se representa por x y se llama **abscisa de *P***, la longitud del segmento dirigido $\overline{OB}$ se representa por y y se llama **ordenada de *P***.

Los números reales x y y se llaman **coordenadas de *P*** y se representan como ***P*(*x*, *y*)**.

Las abscisas medidas sobre el eje x a la derecha del origen son positivas y a la izquierda del origen son negativas; las ordenadas medidas sobre el eje y hacia arriba del origen son positivas y hacia abajo del origen son negativas.

La localización de un punto por medio de sus coordenadas, se llama **trazado del punto**.

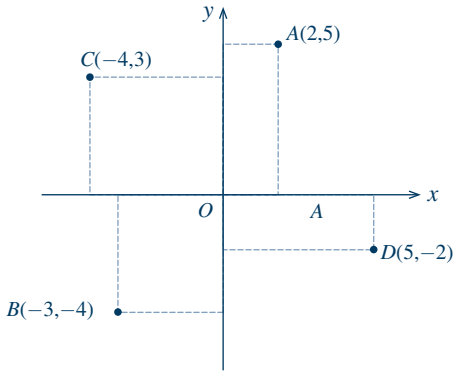
Gráfica de los puntos

En el sistema de coordenadas rectangulares cada par de números reales (x, y), corresponde a un único punto del plano, y a cada punto del plano corresponde un par único de coordenadas (x, y).

Cuando se quiere localizar un punto sobre el plano cartesiano y las funciones trigonométricas asociadas a ésta, es importante tomar en cuenta el signo de las coordenadas del punto $P(x, y)$ y de las funciones trigonométricas dadas según sea el caso.

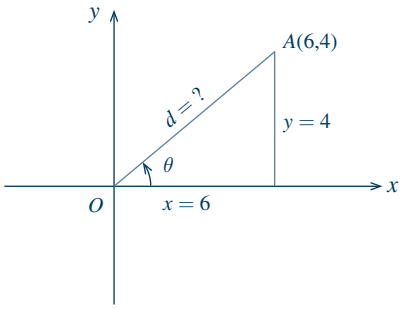
Ejemplo

Localizar los puntos $A(2,5)$, $B(-3,-4)$, $C(-4,3)$ y $D(5,-2)$ sobre el plano cartesiano.



Al aplicar los datos anteriores en los siguientes ejemplos se tiene:

1. Determina las posiciones trigonométricas del ángulo θ si se sabe que está dado por el punto $A(6,4)$.



$d = \text{HIP} = ?$
$x = \text{ADY} = 6$
$y = \text{OP} = 4$

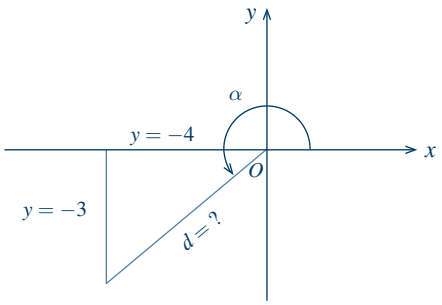
Por el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(y)^2 + (x)^2}$$
$$d = \sqrt{(4)^2 + (6)^2}$$
$$d = \sqrt{52}$$

Funciones trigonométricas para el ángulo θ:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{\sqrt{52}} \qquad \cot\theta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{52}} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{52}}{6}$$
$$\tan\theta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \csc\theta = \frac{\sqrt{52}}{4}$$

2. Calcula las funciones trigonométricas del ángulo α que guarda relación con el punto $A(-4,-3)$.



Por el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{(y)^2 + (x)^2}$$
$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$d = \sqrt{25} = 5$$

Funciones trigonométricas para el ángulo α.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$$
$$\cos\alpha = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$
$$\tan\alpha = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$
$$\cot\alpha = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$
$$\sec\alpha = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$
$$\csc\alpha = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

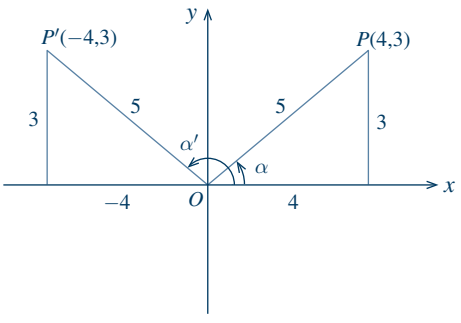
Relación numérica entre las funciones

Dado el valor de una función de un ángulo, encontrar los valores de las demás funciones (ejemplo).

1. Si la función dada es $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, encontrar los valores de las demás funciones del ángulo α.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} = \frac{\text{OP}}{\text{HIP}} = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Distancia}}$$ } Por definición de la función trigonométrica.

Localizamos en qué cuadrante se puede determinar la función dada, ya que suponemos un punto P cuya ordenada es igual a 3 y su distancia al origen es igual a 5 (se debe recordar que la distancia es siempre positiva).



Por el teorema de Pitágoras:

$$\text{ADY} = \sqrt{(\text{HIP})^2 - (\text{OP})^2}$$
$$\text{ADY} = \sqrt{(5)^2 - (3)^2}$$
$$\text{ADY} = \sqrt{25 - 9}$$
$$\text{ADY} = \pm 4$$

Al tratar de graficar la ordenada igual a 3, nos damos cuenta que tenemos dos puntos P y P' que están a 3 unidades sobre el eje x y a 5 unidades de distancia del origen (O), por lo tanto, resultan dos ángulos que son: xOP y xOP', situados en el primero y segundo cuadrantes, respectivamente, cada uno de los cuales puede ser el ángulo α.

Las coordenadas de los puntos son: $P(4,3)$ y $P'(-4,3)$.

Las funciones trigonométricas para cada ángulo son:

Para el ángulo $xOP = \alpha$

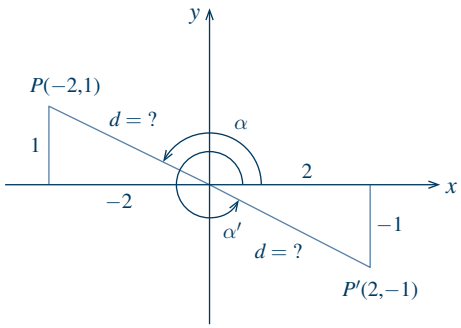
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$$
$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$
$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$
$$\cot\alpha = \frac{4}{3}$$
$$\sec\alpha = \frac{5}{4}$$
$$\csc\alpha = \frac{5}{3}$$

Para el ángulo $xOP' = \alpha'$

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{3}{5}$$
$$\cos\alpha' = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$
$$\tan\alpha' = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$
$$\cot\alpha' = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$
$$\sec\alpha' = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$
$$\csc\alpha' = \frac{5}{3}$$

2. Dada $\cot\alpha = -2$, encuentra los valores de las demás funciones trigonométricas para el ángulo α.

La función se escribe $\cot\alpha = \dfrac{-2}{1}$ o $\cot\alpha = \dfrac{2}{-1}$; si $\cot\alpha = \dfrac{\text{ADY}}{\text{OP}} = \dfrac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}}$ por lo que suponemos que los puntos de referencia con: $P(-2,1)$ y $P'(2,-1)$, resultando dos ángulos xOP y xOP' que gráficamente se ubican en el segundo y cuarto cuadrantes, respectivamente.



$\sphericalangle xOP = \sphericalangle\alpha$

Abscisa = ADY = −2

Ordenada = OP = 1

Distancia = HIP = ?

$\sphericalangle xOP' = \sphericalangle\alpha'$

Abscisa = ADY = 2

Ordenada = OP = −1

Distancia = HIP = ?

Por el teorema de Pitágoras:

$$\text{HIP} = \sqrt{(\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2}$$
$$\text{HIP} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2}$$
$$\text{HIP} = \sqrt{1+4}$$
$$\therefore \quad \text{HIP} = \sqrt{5}$$

Las funciones trigonométricas para cada ángulo son:

$$\measuredangle xOP = \measuredangle\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\cot\alpha = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{-2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

$$\measuredangle xOP' = \measuredangle\alpha'$$

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\alpha' = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\alpha' = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\cot\alpha' = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\sec\alpha' = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\alpha' = \frac{\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5}$$

EJERCICIO **41**

I. Resuelve los siguientes problemas y socializa tus respuestas.

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

1. Determina en cada inciso las funciones trigonométricas del ángulo θ si se sabe que está dado por los siguientes puntos:

   a) $A(6,7)$

   b) $B(-4,5)$

   c) $C(6,-3)$

   d) $D(2,-5)$

   e) $E(-3,-1)$

   f) $F(-5,-7)$

   g) $G(-6,2)$

   h) $H(2,2)$

2. Dados los valores de funciones trigonométricas de un ángulo, determina en qué cuadrantes del sistema de coordenadas se ubican y el valor de las demás funciones trigonométricas.

   a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{13}$

   b) $\tan\beta = -\frac{5}{4}$

   c) $\csc\gamma = 2$

   d) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$

   e) $\cot\beta = -3$

   f) $\sec\gamma = -\frac{\sqrt{17}}{4}$

   g) $\cot\alpha = -3\sqrt{5}$

   h) $\cos\beta = \frac{28}{31}$

   i) $\operatorname{sen}\gamma = -\frac{7}{15}$

3. Dados los siguientes puntos, calcula las funciones trigonométricas de los ángulos xOA y xOB formados con el sistema de coordenadas:

   a) $A(3,7)$ y $B(-2,5)$

   b) $A(-5,9)$ y $B(4,-6)$

   c) $A(-1,-4)$ y $B(-7,4)$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Identidades trigonométricas

Definición de identidad trigonométrica

Es una igualdad algebraica entre razones de un mismo ángulo, que se cumple para cualquier valor asignado al ángulo.

Funciones trigonométricas recíprocas

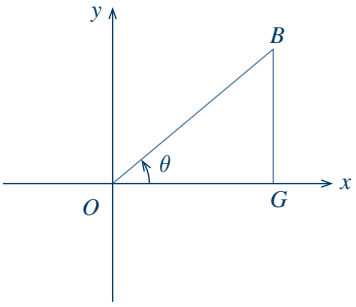
Dos cantidades son recíprocas, si su producto es igual a la unidad.

Ejemplo

$$\frac{2}{5}\text{es un recíproco a}\frac{5}{2},\ \text{porque:}\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{10}{10}=1$$

De lo anterior se deduce que las **funciones trigonométricas recíprocas** son, *dos funciones cuyo producto es igual a la unidad.*

Auxiliándonos de la siguiente gráfica, se tiene:



Las funciones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}\theta=\frac{\overline{BG}}{\overline{OB}} \qquad \cos\theta=\frac{\overline{OG}}{\overline{OB}}$$

$$\tan\theta=\frac{\overline{BG}}{\overline{OG}} \qquad \cot\theta=\frac{\overline{OG}}{\overline{BG}}$$

$$\sec\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{OG}} \qquad \csc\theta=\frac{\overline{OB}}{\overline{BG}}$$

Si multiplicamos el **sen θ** por **csc θ**, tenemos: $(\operatorname{sen}\theta)(\csc\theta)=\left(\frac{\cancel{BG}}{\cancel{OB}}\right)\left(\frac{\cancel{OB}}{\cancel{BG}}\right)$, entonces,

$(\operatorname{sen}\theta)(\csc\theta)=1$. Despejando para sen θ, tenemos: $\operatorname{sen}\theta=\dfrac{1}{\csc\theta}$

Si despejamos para la csc θ, resulta: $\csc\theta=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

$\therefore$ El seno es recíproco a la cosecante.

Si multiplicamos **cos θ** por **sec θ**, tenemos: $(\csc\theta)(\sec\theta)=\left(\frac{\cancel{OG}}{\cancel{OB}}\right)\left(\frac{\cancel{OB}}{\cancel{OG}}\right)$, entonces,

$(\cos\theta)(\sec\theta)=1$. Despejando para el cos θ, tenemos: $\cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$

Si despejamos para la sec θ, resulta: $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\therefore$ El coseno es recíproco a la secante.

Si multiplicamos **tan θ** por **cot θ**, tenemos: $(\tan\theta)(\cot\theta) = \left(\dfrac{\overline{BG}}{\overline{OG}}\right)\left(\dfrac{\overline{OG}}{\overline{BG}}\right)$, entonces,

$(\tan\theta)(\cot\theta) = 1$, despejando para la tan θ, resulta: $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$

Si despejamos para la cot θ, resulta: $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

$\therefore$ La tangente es recíproca a la cotangente.

Fórmulas fundamentales o identidades principales

Si se continúa con el apoyo gráfico y con las funciones trigonométricas, así como sus recíprocos, se tiene que:

1. La división entre sen θ y cos θ, resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\dfrac{\overline{BG}}{\overline{OB}}}{\dfrac{\overline{OG}}{\overline{OB}}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{OG}} = \tan\theta$$

Como $\tan\theta = \dfrac{\overline{BG}}{\overline{OG}}$, tenemos: $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

De las funciones trigonométricas recíprocas, tenemos que $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$, comparándola con $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, al sustituir se tiene: $\dfrac{1}{\cot\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

En ambos miembros de la igualdad, los divisores pasan como factores.

cos θ (1) = cot θ sen θ despejando para la función cotangente. $\therefore$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

2. Al elevar al cuadrado el sen θ y cos θ, y sumar miembro a miembro se tiene:

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 = \left(\frac{\overline{BG}}{\overline{OB}}\right)^2 \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{\overline{BG}^2}{\overline{OB}^2} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{\overline{BG}^2}{\overline{OB}^2} + \frac{\overline{OG}^2}{\overline{OB}^2}$$

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{\overline{OG}}{\overline{OB}}\right)^2 \qquad \cos^2\theta = \frac{\overline{OG}^2}{\overline{OB}^2} \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{\overline{BG}^2 + \overline{OG}^2}{\overline{OB}^2}$$

Por el teorema de Pitágoras: $(\text{HIP})^2 = (\text{OP})^2 + (\text{ADY})^2$

$$(\overline{OB})^2 = (\overline{BG})^2 + (\overline{OG})^2, \quad \text{al sustituir tenemos que:}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \frac{\overline{OB}^2}{\overline{OB}^2} \qquad \therefore \quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

De esta fórmula se deduce:

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\operatorname{sen}^2\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} \qquad \cos\theta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

3. Si dividimos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, entre $\cos^2\theta$, resulta: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ al sustituir en fórmulas anteriores como: $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ se tiene, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

De esta fórmula se deduce que:

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 \qquad \text{y} \qquad \sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$
$$\tan\theta = \sqrt{\sec^2\theta - 1} \qquad \sec\theta = \sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

4 . De la igualdad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se divide entre $\operatorname{sen}^2\theta$, lo que resulta: $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$

Al sustituir en fórmulas anteriores como: $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$ y $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}$ se tiene, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.

De esta fórmula se deduce que:

$$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1 \qquad \text{y} \qquad \csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$
$$\cot\theta = \sqrt{\csc^2\theta - 1} \qquad \csc\theta = \sqrt{1 + \cot^2\theta}$$

Aplicaciones. Las fórmulas anteriores se emplean para determinar las funciones de un ángulo cualquiera, cuando se conoce una de ellas.

EJEMPLOS

Ejemplos 1 Dado sen α, obtén las demás funciones del ángulo α.

a) Coseno. Si $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\sqrt{\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$$
$$\therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$$

b) Tangente. Si $\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, pero como: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}$

Por lo tanto: $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$

c) Cotangente. Si $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$, pero como: $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\therefore \quad \cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$$

d) Secante. Si $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, pero como: $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$

$$\therefore \quad \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$$

e) Cosecante. Tenemos directamente que $\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$

Resumen de las funciones

	sen α	cos α	tan α	cot α	sec α	csc α
sen α		$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\csc\alpha}$
cos α	$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$	$\dfrac{\cot\alpha}{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}$
tan α	$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\cot\alpha}$	$\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
cot α	$\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\tan\alpha}$		$\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\sqrt{\csc^2\alpha-1}$
sec α	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\sqrt{1+\tan^2\alpha}$	$\dfrac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}$		$\dfrac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}$
csc α	$\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}$	$\sqrt{1+\cot^2\alpha}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

Comprobación de identidades trigonométricas

Para evidenciar una identidad se tienen varios métodos, pero el más común nos dice que en el primer miembro de la identidad se realizan todas las sustituciones y operaciones necesarias, sin efectuar cambio alguno en el segundo miembro de la identidad, hasta lograr la igualdad de los miembros.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Demuestra que $(1 + \cot^2 x)\cos^2 x = \cot^2 x$

Si $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$, al sustituir en la identidad dada, tenemos:

$$(\csc^2 x)(\cos^2 x) = \cot^2 x \quad \} \text{ al sustituir } \csc^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)(\cos^2 x) = \cot^2 x \quad \} \text{ al realizar las operaciones indicadas}$$

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \cot^2 x \quad \} \text{ al sustituir } \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$\therefore \quad \cot^2 x = \cot^2 x \quad \textit{L.C.D.D.}$$

2 Demuestra que $\sec a\,(\sec a - \cos a) - \tan^2 a = 0$

$$\sec a(\sec a - \cos a) - \tan^2 a = 0 \quad \} \text{ multiplicando}$$

$$\sec^2 a - \sec a \cos a - \tan^2 a = 0 \quad \} \text{ al sustituir } \sec^2 a = \tan^2 a + 1 \text{ y } \sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$(\tan^2 a + 1) - \left(\frac{1}{\cos a}\right)\cos a - \tan^2 a = 0$$

$$(\tan^2 a + 1) - \frac{\cos a}{\cos a} - \tan^2 a = 0 \quad \} \text{ al realizar las operaciones indicadas}$$

$$\tan^2 a + 1 - 1 - \tan^2 a = 0$$

$$\therefore \quad 0 = 0 \quad \textit{L.C.D.D.}$$

3 Demuestra que $\sec^4 b\,(1 - \operatorname{sen}^4 b) - 2\tan^2 b = 1$

$$\sec^4 b - \sec^4 b \operatorname{sen}^4 b - 2\tan^2 b = 1 \quad \} \text{ multiplicando}$$

$$(\sec^2 b)^2 - \left(\frac{1}{\cos^4 b}\right)\operatorname{sen}^4 b - 2\tan^2 b = 1 \quad \} \text{ al factorizar el primer término y al sustituir, se tiene: } \sec^4 b = \frac{1}{\cos^4 b}.$$

$$(\tan^2 b + 1)^2 - \frac{\operatorname{sen}^4 b}{\cos^4 b} - 2\tan^2 b = 1 \quad \} \text{ al sustituir } \sec^2 b = \tan^2 b + 1.$$

$$\tan^4 b + 2\tan^2 b + 1 - \tan^2 b - 2\tan^2 b = 1 \quad \} \text{ desarrollando el binomio al cuadrado y sustituyendo } \tan^4 b = \frac{\operatorname{sen}^4 b}{\cos^4 b}.$$

$$\therefore \quad 1 = 1 \quad \textit{L.C.D.D.}$$

EJERCICIO 42

I. Resuelve los siguientes problemas.

1. Calcula las demás funciones trigonométricas, si se sabe que:

a) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

b) $\tan\beta = \frac{5}{7}$

c) $\sec\gamma = \frac{13}{12}$

d) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$

e) $\cot\beta = \frac{3}{4}$

f) $\csc\gamma = \frac{9}{4}$

2. Comprueba las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\operatorname{sen}^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$

b) $\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} = \tan x + 1$

c) $1 - \tan^2\alpha = 2 - \sec^2\alpha$

d) $\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha}$

e) $\sec x(1 - \operatorname{sen}^2 x) = \cos x$

f) $1 - \tan^4\beta = 2\sec^2\beta - \sec^4\beta$

g) $\frac{\tan^2\alpha - \sec^2\alpha}{\cot^2\alpha - \cos^2\alpha} = \tan^6\alpha$

h) $\cot^2 x - \cos^2 x = \dfrac{\cos^4 x}{\operatorname{sen}^2 x}$

i) $\csc^4\alpha(1 - \cos^4\alpha) - 2\cot^2\alpha = 1$

j) $\operatorname{sen}^4 x = \dfrac{1 - \cos^2 x}{\csc^2 x}$

k) $1 + \tan^2 a = \sec^3 a \cos a$

l) $1 - 2\operatorname{sen}^2 b = \dfrac{1 - \tan^2\beta}{1 + \tan^2\beta}$

Verifica tus resultados en la sección de respuestas.

Relaciones trigonométricas en triángulos oblicuángulos (leyes de senos, cosenos y tangentes)

Un triángulo es oblicuángulo cuando no presenta un ángulo recto; si tiene sus tres ángulos agudos, se denomina triángulo oblicuángulo acutángulo; pero si tiene un ángulo obtuso, entonces se trata de un triángulo oblicuángulo.

Para cualquier triángulo, siempre existe relación entre sus lados y ángulos, tal como se manifiesta en el siguiente teorema: **En todo triángulo al ángulo mayor se opone el lado de mayor longitud, al ángulo menor se opone el lado de menor longitud, a ángulos iguales se oponen lados de igual longitud**.

Resolver un triángulo significa determinar todos sus elementos, es decir: sus tres ángulos interiores, la longitud de sus tres lados y su área.

Para resolver un triángulo oblicuángulo es necesario conocer tres elementos, siendo indispensable que al menos uno de ellos sea la longitud de un lado; los casos que pueden presentarse en la resolución son:

a) conocer un lado y los ángulos adyacentes,

b) conocer dos lados y el ángulo comprendido,

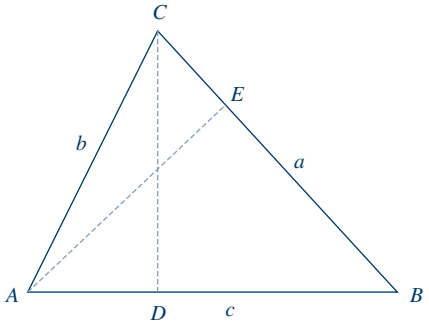
c) conocer los tres lados y

d) conocer dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

La relación de los triángulos oblicuángulos es posible al aplicar las leyes de los senos, cosenos y tangentes que se exponen a continuación.

Ley de los senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. Matemáticamente se expresa como: $\left[\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}\right]$.



Demostración de la ley en un triángulo acutángulo:

Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo, en el cual trazamos las alturas $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$.

Considerando el $\triangle ACD$, se tiene que:

$\operatorname{sen} A=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$, si $\overline{AC}=b$, resulta:

$\operatorname{sen} A=\frac{\overline{CD}}{b}$, despejando para $\overline{CD}$, resulta:

$\overline{CD}=b\operatorname{sen} A$ (ec. 1).

Considerando el $\triangle BCD$, tenemos que: $\operatorname{sen} B=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$, si $\overline{BC}=a$, resulta:

$\operatorname{sen} B=\frac{\overline{CD}}{a}$, despejando para $\overline{CD}$, tenemos que:

$CD=a\operatorname{sen} B$ (ec. 2).

Comparando las ecuaciones 1 y 2, se tiene que: $b\operatorname{sen} A=a\operatorname{sen} B$. $\therefore\quad \frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$ (ec. 3).

Si consideramos el $\triangle ACE$, se tiene que: $\operatorname{sen} C=\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, si $\overline{AC}=b$, resulta:

$\operatorname{sen} C=\frac{\overline{AE}}{b}$, despejando para $\overline{AE}$, resulta:

$\overline{AE}=b\operatorname{sen} C$ (ec. 4).

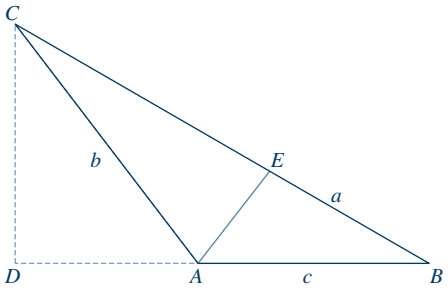
Considerando el $\triangle ABE$, se tiene: $\operatorname{sen} B=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$, si $\overline{AB}=c$, resulta:

$\operatorname{sen} B=\frac{\overline{AE}}{c}$, despejando para $\overline{AE}$, $\overline{AE}=C\operatorname{sen} B$ (ec. 5).

Comparando las ecuaciones 4 y 5, resulta: $b\operatorname{sen} C=c\operatorname{sen} B$. $\therefore\quad \frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$ (ec. 6).

Comparando por último las ecuaciones 3 y 6, tenemos: $\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Demostración de la ley en un triángulo obtusángulo:



Sea $\triangle ABC$ un triángulo, en el cual trazamos las alturas $\overline{CD}$ y $\overline{AE}$.

Considerando el $\triangle BCD$, se tiene que:

$\operatorname{sen} B = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$, si $\overline{BC} = a$, resulta:

$\operatorname{sen} B = \dfrac{\overline{CD}}{a}$, despejando para $\overline{CD}$, resulta:

$\overline{CD} = a \operatorname{sen} B$ (ec. 1).

En el $\triangle ACD$, tenemos que: $\operatorname{sen} A = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$, si $\overline{AC} = b$, resulta:

$\operatorname{sen} A = \dfrac{\overline{CD}}{b}$, despejando para $\overline{CD}$, tenemos que:

$\overline{CD} = b \operatorname{sen} A$ (ec. 2).

Comparando las ecuaciones 1 y 2, se tiene que: $a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A$. $\therefore \quad \dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B}$ (ec. 3).

Si consideramos el $\triangle AEC$, se tiene que: $\operatorname{sen} C = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$, si $\overline{AC} = b$, resulta:

$\operatorname{sen} C = \dfrac{\overline{AE}}{b}$, despejando para AE, $\overline{AE} = b \operatorname{sen} C$ (ec. 4).

Si consideramos el $\triangle AEB$, se tiene que: $\operatorname{sen} B = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$, si $\overline{AB} = C$, lo que resulta:

$\operatorname{sen} B = \dfrac{\overline{AE}}{c}$, despejando para $\overline{AE}$, $\overline{AE} = c \operatorname{sen} B$ (ec. 5).

Comparando las ecuaciones 4 y 5, resulta: $b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$. $\therefore \quad \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$ (ec. 6).

Comparando por último las ecuaciones 3 y 6, tenemos: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Aplicación de la ley de los senos

En la resolución de triángulos oblicuángulos por medio de la ley de los senos, es necesario conocer:

a) Un lado y los ángulos adyacentes.

b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

De la expresión matemática de la ley se aplica la igualdad que satisfaga los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 ●●• Calcula los elementos de un triángulo oblicuángulo si se sabe que: $c = 28$ cm, $\measuredangle A = 69°$ y $\measuredangle B = 35°$.

Datos

$\measuredangle A = 69°$

$\measuredangle B = 35°$

$c = 28$ cm

$\measuredangle C = ?$

$a = ?$

$b = ?$

Fórmulas

$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}$$

Sustituciones

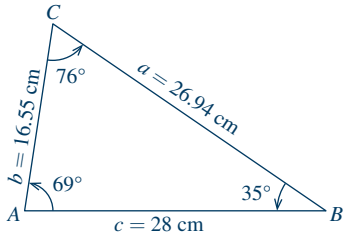
$69° + 35° + \measuredangle C = 180°$

$\measuredangle C = 180° - 69° - 35°$

$\measuredangle C = 180° - 104°$

$\measuredangle C = 76°$

$$a = \frac{(28 \text{ cm})(\operatorname{sen} 69°)}{\operatorname{sen} 76°}$$



$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$$

$$a = \frac{(28 \text{ cm})(0.9335)}{(0.9702)}$$

$a = 26.94$ cm

$$b = \frac{(26.94 \text{ cm})(\operatorname{sen} 35°)}{\operatorname{sen} 69°}$$

$$b = \frac{(26.94 \text{ cm})(0.5735)}{(0.9335)}$$

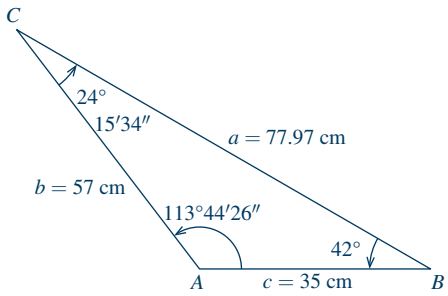
$b = 16.55$ cm

Resultado

$a = 26.94$ cm

$b = 16.55$ cm

2 ●●• Calcula los elementos de un triángulo oblicuángulo si se sabe que: $b = 57$ cm, $c = 35$ cm y $\measuredangle B = 42°$.



Datos

$b = 57\text{cm}$

$c = 35\text{cm}$

$\sphericalangle B = 42°$

$a = ?$

$\sphericalangle A = ?$

$\sphericalangle C = ?$

Fórmulas

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b}$$

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

Resultado

$a = 77.97$ cm

$\sphericalangle A = 113°44'26''$

$\sphericalangle C = 24°15'34''$

Sustituciones

$$\operatorname{sen} C = \frac{(35\text{ cm})(\operatorname{sen} 42°)}{57\text{ cm}}$$

$$\operatorname{sen} C = \frac{(35)(0.6691)}{57} = 0.4108$$

$$\sphericalangle C = \operatorname{arcsen}(0.4108)$$

$$\sphericalangle C = 24°15'34''$$

$$\sphericalangle A + 42° + 24°15'34'' = 180°$$

$$\sphericalangle A = 180° - 42° - 24°15'34''$$

$$\sphericalangle A = 113°44'26''$$

$$a = \frac{(57\text{ cm})(\operatorname{sen} 113°44'26'')}{\operatorname{sen} 42°}$$

$$a = \frac{(57\text{ cm})(0.9153)}{(0.6691)} = 77.97\text{ cm}$$

Ley de los cosenos

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.

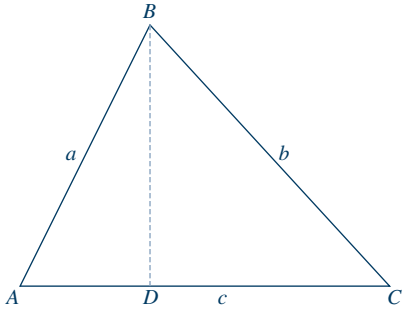
Matemáticamente se expresa como:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B, \quad \text{despejando,} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$$

Demostración de la ley en un triángulo acutángulo.

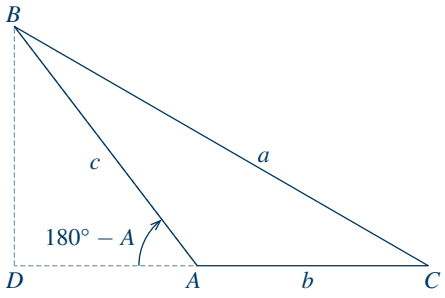


Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo, en el cual trazamos la altura $\overline{BD}$ y por el teorema **generalizado de Pitágoras**, se tiene que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b$ (ec. 1), pero como: $\cos A = \dfrac{\overline{AD}}{c}$, despejando para AD, resulta: $\overline{AD} = c\cos A$ (ec. 2). Al sustituir la ecuación 2 en la 1, se tiene que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cos A$. De la misma manera se demuestra que: $\dfrac{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B}{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.

Teorema generalizado de Pitágoras (cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo en un triángulo). En todo triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros lados, menos el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Demostración de la ley en un triángulo obtusángulo

Sea $\triangle ABC$ un triángulo obtusángulo, en el cual se traza la altura $\overline{BD}$ y por el teorema **generalizado de Pitágoras**, se tiene que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2Ab\,\overline{AD}$ (ec. 1), pero como: $\cos(180° - A) = \dfrac{\overline{AD}}{c} = -\cos A$, despejando para $\overline{AD}$ se tiene: $\overline{AD} = -c\cos A$ (ec. 2).



Al sustituir la ecuación 2 en la 1, resulta: $a^2 = b^2 + c^2 + 2b\,(-c\cos A)$, por lo tanto: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. De la misma manera se demuestra que: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Teorema generalizado de Pitágoras (cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso, en un triángulo). El cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Aplicación de la ley de los cosenos

En la resolución de triángulos oblicuángulos por medio de la ley de los cosenos, se requiere conocer:

a) Los tres lados.

b) Dos lados y el ángulo comprendido.

De las expresiones matemáticas de la ley de los cosenos, se aplican las igualdades que satisfagan los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula los elementos de un triángulo oblicuángulo si se sabe que: $a = 19$ cm, $b = 24$ cm y $c = 13$ cm.

Datos

$a = 19$ cm

$b = 24$ cm

$c = 13$ cm

$\measuredangle A = ?$

$\measuredangle B = ?$

$\measuredangle C = ?$

Fórmulas

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}$$

Sustituciones

$$\cos A = \frac{(24\text{ cm})^2 + (13\text{ cm})^2 - (19\text{ cm})^2}{2(24\text{ cm})(13\text{ cm})}$$

$$\cos A = \frac{576\text{ cm}^2 + 169\text{ cm}^2 - 361\text{ cm}^2}{624\text{ cm}^2}$$

$$\cos A = \frac{384\text{ cm}^2}{624\text{ cm}^2} = 0.6153$$

$$\measuredangle A = \arccos(0.6153)$$

$$\measuredangle A = 52°1'12''$$

$$\cos B = \frac{(19\text{ cm})^2 + (13\text{ cm})^2 - (24\text{ cm})^2}{2(19\text{ cm})(13\text{ cm})}$$

$$\cos B = \frac{361\text{ cm}^2 + 169\text{ cm}^2 - 576\text{ cm}^2}{494\text{ cm}^2}$$

$$\cos B = \frac{-46\text{ cm}^2}{494\text{ cm}^2} = -0.0931$$

$$\measuredangle B = \arccos(-0.0931)$$

$$\measuredangle B = -84°39'25''$$

$$\measuredangle B = 180° - 84'39'25''$$

$$\measuredangle B = 95°20'35''$$

$$\cos C = \frac{(19\text{ cm})^2 + (24\text{ cm})^2 - (13\text{ cm})^2}{2(19\text{ cm})(24\text{ cm})}$$

$$\cos C = \frac{361\text{ cm}^2 + 576\text{ cm}^2 - 169\text{ cm}^2}{912\text{ cm}^2}$$

$$\cos C = \frac{768\text{ cm}^2}{912\text{ cm}^2} = 0.8421$$

$$\measuredangle C = \arccos(0.8421)$$

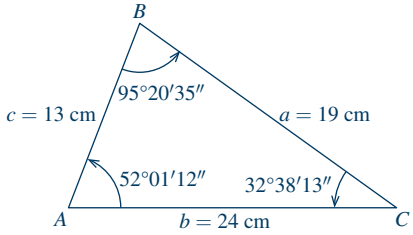
$$\measuredangle C = 32°38'13''$$

Resultado

$\measuredangle A = 52°1'12''$

$\measuredangle B = 95°20'35''$

$\measuredangle C = 32°38'13''$



Comprobación

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

$\sphericalangle A = 52°01'12''$

$\sphericalangle B = 95°20'35''$

$\sphericalangle C = 32°38'13''$

$179°59'60'' = 180°$

2 ●●· Calcula los elementos de un triángulo oblicuángulo si se sabe que: $\sphericalangle A = 57°36'$, $b = 9$ cm y $c = 15$ cm.

Datos

$\sphericalangle A = 57°36'$

$b = 9$ cm

$c = 15$ cm

$\sphericalangle B = ?$

$a = ?$

$\sphericalangle C = ?$

Fórmulas

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}$

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

Sustituciones

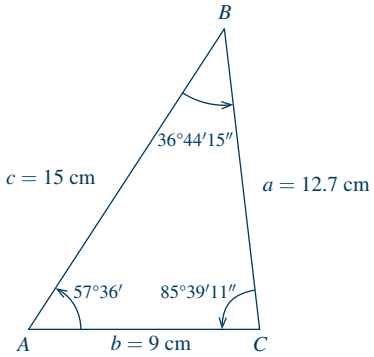
$a = \sqrt{(9\text{ cm})^2 + (15\text{ cm})^2 - 2(9\text{ cm})(15\text{ cm})\cos 57°36'}$

$a = \sqrt{81\text{ cm}^2 + 225\text{ cm}^2 - 270\text{ cm}^2(0.5358)}$

$a = \sqrt{306\text{ cm}^2 - 144.6732\text{ cm}^2}$

$a = \sqrt{161.3267\text{ cm}^2}$

$a = 12.70$ cm



$\cos B = \dfrac{(12.7\text{ cm})^2 + (15\text{ cm})^2 - (9\text{ cm})^2}{2(12.70\text{ cm})(15\text{ cm})}$

$\cos B = \dfrac{161.32\text{ cm}^2 + 225\text{ cm}^2 - 81\text{ cm}^2}{381\text{ cm}^2}$

$\cos B = \dfrac{305.32\text{ cm}^2}{381\text{ cm}^2} = 0.8013$

$\sphericalangle B = 36°44'15''$

$\cos C = \dfrac{(12.7\text{ cm})^2 + (9\text{ cm})^2 - (15\text{ cm})^2}{2(12.7\text{ cm})(9\text{ cm})}$

$\cos C = \dfrac{161.32\text{ cm}^2 + 81\text{ cm}^2 - 225\text{ cm}^2}{228.6\text{ cm}^2}$

$\cos C = \dfrac{17.32\text{ cm}^2}{228.6\text{ cm}^2} = 0.0757$

$\sphericalangle C = \arccos(0.0757)$

$\sphericalangle C = 85°39'11''$

Comprobación

$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

$\sphericalangle A = 57°36'$

$\sphericalangle B = 36°44'15''$

$\sphericalangle C = 85°39'11''$

$178°119'26''$

$179°59'26'' \approx 180°$

Resultado

$a = 12.70$ cm

$\sphericalangle B = 36°44'15''$

$\sphericalangle C = 85°39'11''$

Ley de las tangentes

En todo triángulo, la diferencia de dos de sus lados, es a su suma, como la tangente de la mitad de la diferencia de los ángulos opuestos a esos lados, es a la tangente de la mitad de la suma de dichos ángulos.

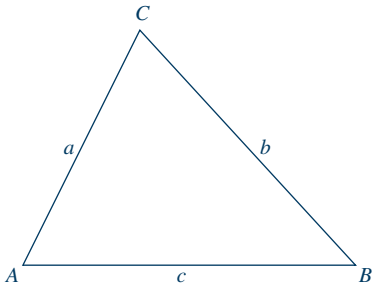
Matemáticamente se expresa como:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)} \qquad \tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A-C)}{\tan\frac{1}{2}(A+C)}, \quad \text{despejando,} \quad \tan\frac{1}{2}(A+C)=\frac{a+c}{a-c}\tan\frac{1}{2}(A-C)$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)} \qquad \tan\frac{1}{2}(B+C)=\frac{b+c}{b-c}\tan\frac{1}{2}(B-C)$$

Demostración de la ley en un triángulo acutángulo



Partiendo de la ley de los senos, es decir:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

Al aplicar la siguiente propiedad: en toda proporción, se permutan los medios y se obtiene otra proporción. Resulta que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}, \frac{a}{b}=\frac{\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B}$$

Al aplicar otra propiedad: en toda proporción, la suma de los dos primeros términos, es a su diferencia, como la suma de los dos segundos términos, es a su diferencia. Resulta que:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A} \text{ (ec. 1)} \qquad \frac{a-b}{a}=\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A} \text{ (ec. 2).}$$

Al dividir la ecuación 2 entre la ecuación 1,

$$\text{se tiene: } \frac{\frac{a-b}{\cancel{a}}=\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\cancel{\operatorname{sen}A}}}{\frac{a+b}{\cancel{a}}=\frac{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B}{\cancel{\operatorname{sen}A}}} \quad \therefore \quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B} \text{ (ec. 3)}$$

Por identidades trigonométricas, se tiene:

$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$ (Primera identidad)

$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$ (Segunda identidad)

Al sustituir dichas identidades en la ecuación 3, tenemos:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cancel{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}$, ordenando se tiene que:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$, separando factores se tiene:

$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)} \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$ por identidades trigonométricas como las siguientes tenemos:

$a)\quad \tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$

$b)\quad \cot\frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$

Resulta que: $\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{1}{2}(A-B)\cot\frac{1}{2}(A+B)$, empleando la siguiente identidad:

$\cot\frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$, resulta que: $\frac{a-b}{a+b} = \tan\frac{1}{2}(A-B)\frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

De la misma manera se puede demostrar que:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-C)}{\tan\frac{1}{2}(A+C)} \qquad \text{y} \qquad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)}$$

Aplicación de la ley de las tangentes

En la resolución de triángulos oblicuángulos por medio de la ley de las tangentes, se requiere conocer:

a) Los tres lados.

b) Dos lados y el ángulo comprendido.

De la expresión matemática de la ley, se emplea la que satisfaga a los datos dados.

EJEMPLOS

Ejemplos

1 Calcula los elementos de un triángulo oblicuángulo si se sabe que: $\measuredangle A = 77°$, $b = 8.4$ cm y $c = 13.2$ cm.

Datos

$\measuredangle A = 77°$

$b = 8.4$ cm

$c = 13.2$ cm

$a = ?$

$\measuredangle B = ?$

$\measuredangle C = ?$

Fórmulas

$$\tan\frac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c}\tan\frac{1}{2}(B+C)$$

$$\measuredangle B + \measuredangle C = 180° - \measuredangle A$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$$

Sustituciones

$$\measuredangle B + \measuredangle C = 180° - 77°$$

$$\measuredangle B + \measuredangle C = 103°$$

$$\tan\frac{1}{2}(B-C) = \frac{8.4 \text{ cm} - 13.2 \text{ cm}}{8.4 \text{ cm} + 13.2 \text{ cm}}\tan\frac{1}{2}(103°)$$

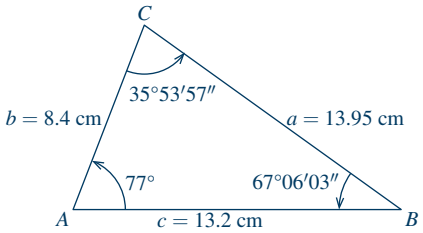
$$\tan\frac{1}{2}(B-C) = \frac{-4.8 \text{ cm}}{21.6 \text{ cm}}\tan(51°30')$$

$$\tan\frac{1}{2}(B-C) = (-0.2222)(1.2571)$$

$$\tan\frac{1}{2}(B-C) = -0.2793$$

$$\measuredangle\frac{(B-C)}{2} = \arctan(-0.2793)$$

$$\measuredangle\frac{(B-C)}{2} = -15°36'03''$$



Como: $\measuredangle(B+C) = 103°, \measuredangle\dfrac{(B+C)}{2} = 51°30'$, si sumamos los siguientes ángulos, se tiene que:

$$\measuredangle\frac{(B+C)}{2} + \measuredangle\frac{(B-C)}{2} = -15°36'03'' + 51°30'$$

$$\frac{\measuredangle B}{2} - \frac{\measuredangle C}{2} + \frac{\measuredangle B}{2} + \frac{\measuredangle C}{2} = 35°53'57''$$

$$\measuredangle B = 35°53'57''$$

$$\measuredangle C = 180° - \measuredangle A - \measuredangle B$$
$$\measuredangle C = 180° - 77° - 35°53'57''$$
$$\measuredangle C = 67°06'03''$$

$$a = \frac{(8.4\text{ cm})(\text{sen}\,77°)}{\text{sen}\,35°53'57''}$$
$$a = \frac{(8.4\text{ cm})(0.9743)}{(0.5863)}$$
$$a = 13.95\text{ cm}$$

2 ●●• Calcula los elementos de un triángulo oblicuángulo si se sabe que: $a = 21$ cm, $b = 32$ cm y $c = 43$ cm.

Datos

$a = 21$ cm
$b = 32$ cm
$c = 43$ cm
$\measuredangle A = ?$
$\measuredangle B = ?$
$\measuredangle C = ?$

Fórmulas

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\measuredangle B + \measuredangle C = 180° - \measuredangle A$$
$$\tan\frac{1}{2}(B + C) = \frac{b + c}{b - c}\tan\frac{1}{2}(B - C)$$

Sustituciones

$$\cos A = \frac{(32\text{ cm})^2 + (43\text{ cm})^2 - (21\text{ cm})^2}{2(32\text{ cm})(43\text{ cm})}$$
$$\cos A = \frac{2432\text{ cm}^2}{2752\text{ cm}^2} = 0.8837$$
$$\measuredangle A = \arccos(0.8837)$$
$$\measuredangle A = 27°54'19''$$

$$\measuredangle B + \measuredangle C = 180° - 27°54'19''$$
$$\measuredangle B + \measuredangle C = 152°05'41''$$
$$\frac{\measuredangle B + \measuredangle C}{2} = 76°02'50''$$

$$\tan(76°02'50'') = \frac{32\text{ cm} + 43\text{ cm}}{32\text{ cm} - 43\text{ cm}}\tan\frac{1}{2}(B - C)$$
$$4.024 = -6.8181\left[\tan\frac{1}{2}(B - C)\right]$$
$$\tan\frac{1}{2}(B - C) = \frac{4.0249}{-6.8181} = -0.5903$$
$$\measuredangle\frac{(B - C)}{2} = \arctan(-0.5903)$$
$$\measuredangle\frac{(B - C)}{2} = -30°33'16''$$

Como $\sphericalangle(B + C) = 76°02'50''$, sumándolo al ángulo anterior resulta:

$$\frac{\sphericalangle B + \sphericalangle C}{2} + \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2} = 76°02'50'' - 30°33'16''$$

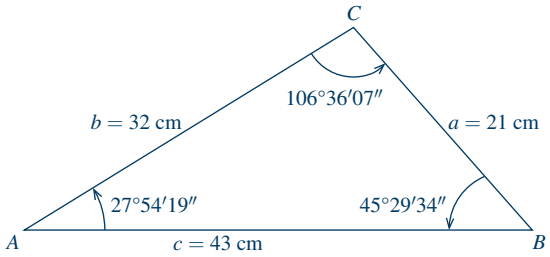
$$\frac{\sphericalangle B}{2} + \frac{\sphericalangle C}{2} + \frac{\sphericalangle B}{2} - \frac{\sphericalangle C}{2} = 45°29'34''$$

$$\sphericalangle B = 45°29'34''$$

$$\sphericalangle C = 180° - \sphericalangle A - \sphericalangle B$$

$$\sphericalangle C = 180° - 27°54'19'' - 45°29'34''$$

$$\sphericalangle C = 106°36'07''$$



EJERCICIO **43**

Escribe los números correspondientes

Competencias genéricas

Competencias disciplinares

I. Aplicando las leyes de los senos, cosenos y de las tangentes, resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos:

1. Calcula los demás elementos del triángulo, si se conocen sus tres lados:

a) $a = 22$ cm, $b = 10$ cm, $c = 17$ cm

b) $a = 5.3$ cm, $b = 10.9$ cm, $c = 13$ cm

c) $a = 45$ cm, $b = 52$ cm, $c = 50$ cm

d) $a = 33$ cm, $b = 46$ cm, $c = 51$ cm

e) $a = 3$ cm, $b = 5$ cm, $c = 7$ cm

f) $a = 84$ cm, $b = 53$ cm, $c = 62$ cm

g) $a = 23.77$ cm, $b = 29.74$ cm, $c = 24.69$ cm

h) $a = 14$ cm, $b = 15$ cm, $c = 16$ cm

2. Dados dos lados y un ángulo, calcula los demás elementos del triángulo.

a) $a = 32$ cm
$b = 28$ cm
$\measuredangle C = 56°48'$

b) $a = 40$ cm
$b = 70$ cm
$\measuredangle C = 78°22'$

c) $b = 50$ cm
$c = 78$ cm
$\measuredangle A = 69°15'$

d) $b = 25.61$ cm
$c = 31.8$ cm
$\measuredangle A = 37°41'$

e) $a = 20$ cm
$c = 13$ cm
$\measuredangle B = 106°58'$

f) $a = 75.45$ cm
$c = 81.3$ cm
$\measuredangle B = 89°11'$

g) $a = 11$ cm
$b = 2\text{l}$ cm
$\measuredangle C = 98°$

h) $b = 80$ cm
$c = 49$ cm
$\measuredangle A = 101°33'$

3. Dado un lado y dos ángulos adyacentes, calcula los demás elementos del triángulo.

a) $\measuredangle A = 51°$
$\measuredangle B = 28°$
$c = 39$ cm

b) $\measuredangle B = 39°$
$\measuredangle C = 84°39'$
$a = 68.7$ cm

c) $\measuredangle C = 14°29'$
$\measuredangle A = 46°51'$
$b = 32$ cm

d) $\measuredangle A = 80°$
$\measuredangle B = 35°$
$c = 12$ m

e) $\measuredangle B = 113°47'$
$\measuredangle C = 34°15'$
$a = 34.82$ cm

g) $\measuredangle A = 29°44'$
$\measuredangle B = 45°38'$
$c = 23.86$ cm

f) $\measuredangle C = 48°$
$\measuredangle A = 61°$
$b = 42$ cm

h) $\measuredangle B = 25°$
$\measuredangle C = 43°$
$a = 30$ m

4. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, calcula los demás elementos del triángulo.

a) $a = 68.7$ cm
$b = 45$ cm
$\measuredangle B = 38°57'$

d) $a = 42.3$ m
$c = 83.44$ m
$\measuredangle C = 105°30'$

b) $b = 11.36$ cm
$c = 6.77$ cm
$\measuredangle C = 53°40'$

e) $b = 4$ m
$a = 13$ m
$\measuredangle B = 15°14'$

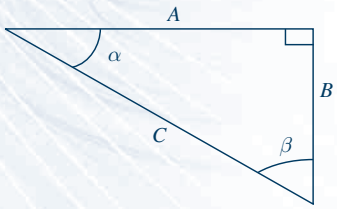
c) $b = 374$ cm
$a = 318$ cm
$\measuredangle A = 34°15'$

f) $a = 50$ cm
$b = 40$ cm
$\measuredangle A = 99°$

Autoevaluación

Realiza lo que se indica en cada caso.

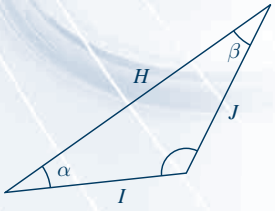
1. Dado el siguiente triángulo rectángulo señala las relaciones de cos, sec y cot:



2. Si A mide 5.21 km y B mide 12.74 km, ¿cuál sería el valor del cateto C y los valores de α y β?

3. Calcula la longitud de la diagonal de un parque con forma de un cuadrado que mide 2.89 m de lado.

4. Por medio de las leyes de senos y cosenos encuentra $\angle\gamma$, H y I del triángulo obtusángulo mostrado a continuación. Considera que $\angle\alpha = 23.0°$, $\angle\beta = 31.0°$ y $J = 27.43$ cm.



Respuestas de algunos reactivos de los distintos ejercicios propuestos

Ejercicio 1

(I). 1. Estudia las propiedades de las formas y de los cuerpos geométricos.

3. La geometría analítica, geometría descriptiva, geometría de proyección, geometría finita, geometría no euclidiana, etcétera.

5. La geometría no euclidiana se basa en los primeros cuatro postulados de la geometría euclidiana haciendo solamente una modificación al quinto postulado.

Ejercicio 2

(I). 1. Griegos

3. Egipcios

5. Pitágoras

7. Platón

9. Apolonio

(II). 1. El cordel

3. *a*) Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.

b) Todo diámetro biseca a la circunferencia.

c) Los ángulos inscritos en una semicircunferencia son iguales.

5. *a*) La cuadratura del círculo.

b) La trisección del ángulo.

c) La duplicación del cubo.

7. Su filosofía establece que la matemática no tiene una finalidad práctica, se cultiva simplemente con el único objetivo de conocer.

9. Establecen las reglas para calcular el área del triángulo isósceles, área del trapecio isósceles y el área del círculo. Determinaron el valor de 3.1604 como relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo, valor más cercano al valor de π que el valor obtenido por los babilonios.

EJERCICIO 3

(II). 1. Premisa mayor: Ningún héroe es cobarde

Premisa menor: Algunos soldados son cobardes

Conclusión: Por lo tanto, algunos soldados no son héroes

Premisa mayor: Todos los hombres son mortales

Premisa menor: Mauricio es hombre

Conclusión: Por lo tanto, Mauricio es mortal

Premisa mayor: Los mamíferos lactan a sus crías

Premisa menor: Los gatos son mamíferos

Conclusión: Por lo tanto, los gatos lactan a sus crías

EJERCICIO 4

(I). I, D, I, D, D, D, I, D, D, D.

EJERCICIO 5

(I). 1. *a*) La marca de un lápiz afilado

b) La cabeza de un alfiler

c) El centro geométrico de un cuerpo

d) La intersección de dos rectas

e) Un grano de arena

3. Dos puntos

5. *a*) Zapatos

b) Computadoras

c) Carros

d) Sillones

e) Mesas

7. Es aquel en el que sólo se considera su forma y su dimensión. Por ejemplo, los conos, las esferas, los prismas, los cilindros, etcétera.

9. La superficie geométrica es el límite que separa a los cuerpos del espacio que los rodea.

11. La longitud es la única dimensión de la línea.

EJERCICIO 6

(I). A, A, P, A, P, P, A, A, P, A.

(II). 1. Las proposiciones matemáticas son la base de la geometría.

3. Un axioma es una proposición tan evidente y sencilla por sí misma que no requiere demostración.

5. Una definición es una proposición que implica casi siempre una descripción clara y precisa de los caracteres de una cosa.

EJERCICIO 7

(I). 1. Es una proposición que exige demostración. La demostración consta de un conjunto de razonamientos lógicos que conducen a la evidencia de la proposición a partir de hechos dados o hipótesis incluidos en el enunciado.

3. *a*) Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas.

b) Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos-internos son iguales.

c) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos (180°).

d) La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado y la diferencia es menor.

e) Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

5. *a*) Dos puntos determinan una recta.

b) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°.

c) Todos los ángulos rectos son iguales.

d) Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto.

e) Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente congruentes a dos ángulos de otro, el tercer ángulo de uno es congruente al tercer ángulo del otro.

7. *a*) Un prisma triangular se puede descomponer en tres tetraedros equivalentes.

b) Dos rectas se cortan en un punto.

9. Teorema directo: si un número termina en cero o en cinco (hipótesis), será divisible por cinco (tesis).

Teorema recíproco: si un número es divisible por cinco (hipótesis), tiene que terminar en cero o en cinco (tesis).

(II). (9), (4), (7), (10), (2), (11), (8), (5), (1), (3).

EJERCICIO 8

(I). 1. Una figura geométrica adimensional que no tiene volumen, área, ni algún otro dimensional que describa una posición en el espacio.

3. Es aquella en la cual la sucesión de puntos se ordenan en la misma dirección.

   a) Las orillas de una mesa.

   b) Los márgenes de un cuaderno.

   c) El filo de una guillotina.

5. Es la que está generada por una continuidad de puntos que cambia de dirección frecuentemente, también se dice que es aquella que no tiene una sola parte recta.

   a) El contorno de una moneda.

   b) El camino que sigue la montaña rusa.

   c) La figura formada por el caparazón de un caracol.

7. Es aquella que al trazarse, inicia y termina en el mismo punto.

9. Es aquella que está formada por una o varias líneas rectas y una o varias curvas.

11. *a*) Por tres puntos no alineados pasa un plano y solamente uno, es decir, que si se toman tres puntos en el espacio estos están inmersos en el espacio que ocupa un solo plano y no pueden pertenecer los tres puntos al mismo tiempo a otro plano.

    b) Dados dos puntos cualesquiera de un plano, la recta que los une está contenida en el plano, es decir, si se escogen dos puntos arbitrariamente los cuales pertenecen a un plano, si se traza una línea recta la cual une a dichos puntos, esta recta se encuentra inmersa en el plano.

13. La intersección de los planos es la colección de puntos que pertenecen a ambos planos intersectados, donde dichos puntos forman una línea.

EJERCICIO 9

(I). 1. Una recta con relación a un plano puede ocupar las siguientes posiciones:

   a) Si la recta está contenida en el plano, son coplanares.

   b) Si la recta corta al plano, la recta es secante al plano.

   c) Si la recta y el plano son paralelos, la recta y el plano no tienen ningún punto en común.

3. Dos planos en el espacio pueden ser:

   a) Secantes, si tienen una recta en común.

   b) Paralelos, si no tienen ningún punto en común.

EJERCICIO 10

(I). 1. Se dice que dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales (ángulos adyacentes iguales).

5. Dos rectas son oblicuas cuando, al cortarse no son perpendiculares, es decir, no forman cuatro ángulos iguales (ángulos adyacentes desiguales).

7. Dos o más rectas son coplanares, es decir, situadas en un mismo plano son paralelas cuando no llegan a tener ningún punto en común, por más que se les prolongue, también se dice que

dos rectas son paralelas cuando son equidistantes, es decir, cuando todos los puntos de una de las rectas están a igual distancia (perpendicular) de los puntos de la otra recta.

EJERCICIO 11

(I). (3), (5), (4), (6), (1).

EJERCICIO 12

(I). 1. Un segmento cualquiera $\overline{CD}$ se dice orientado cuando los puntos C y D conservan cierto orden, es decir, C es el punto inicial y D es el punto final.

3. La medida del segmento $\overline{AB}$ se obtiene colocando la regla o cinta de tal manera que el origen o cero de la escala coincida con un extremo del segmento y se observa hasta qué punto de la recta numérica llega el segmento. Por lo tanto, $\overline{AB} = 6 \text{ cm}\cdot$

   Si la regla no puede hacerse coincidir con el segmento, se toma su longitud con un compás de punta, o bien, con un cordel y se transporta al instrumento de medida, para obtener su lectura.

   Al efectuar la medición debe hacerse con exactitud y precisión con el fin de evitar errores debidos a la imperfección del instrumento de medición y del operador (por lo general, errores visuales).

EJERCICIO 13

(II). 1. Cuando se tienen dos segmentos tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$, en geometría, se dice que el segmento $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, lo cual se representa de la forma $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

3. Todo segmento es igual a sí mismo $\overline{AB} = \overline{AB}$.

5. El carácter recíproco quiere decir que si tenemos un segmento que es igual a un segundo y el segundo es igual a un tercero, por simetría el primero es igual al tercero.

$$\overline{AB} = \overline{CD} \text{ y } \overline{CD} = \overline{EF} \quad \therefore \quad \overline{AB} = \overline{EF}$$

7. La notación simbólica de la congruencia es: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

EJERCICIO 15

(I). 1. Es la abertura comprendida entre dos semirrectas que parten de un punto común llamado vértice. Siendo las semirrectas los lados del ángulo.

3. $\sphericalangle B$ o $\widehat{B}$

5. Para el trazado de la bisectriz de un ángulo se procede de la siguiente forma:

   a) Con una abertura cualquiera y haciendo centro en el vértice, se traza un arco de circunferencia que corta a los lados del ángulo en dos puntos A y B.

   b) Con la misma abertura, haciendo centro en A y B se trazan arcos que se cortan en un punto P.

   c) La bisectriz del ángulo se obtiene trazando con una regla una línea que parta del vértice Y y que pase por el punto P.

EJERCICIO 16

(I). 1. *a*) sistema sexagesimal

b) sistema centesimal

c) sistema circular

3. grado (°)

minuto (′)

segundo (″)

5. grado centesimal (g)

minuto centesimal (m)

segundo centesimal (s)

(II). 1. $780'$

3. $176340''$

5. $2\pi = 6.2832$ rad.

EJERCICIO 17

(I) 1. *a*) $322°34'30''$

b) $1242°39'59''$

c) $87°28'48''$

d) $180°0'4''$

3. *a*) $45°32'25''$

b) $72°7'3''$

c) $169°55'21''$

d) $202°56'48''$

5. $KOL = 40°$

$LOM = 120°$

$MON = 20°$

EJERCICIO 18

(I). 1. El transportador, el cual puede ser circular o semicircular.

3. Para medir los ángulos menores de 180° se emplea el transportador semicircular, el cual se maneja de la siguiente manera: el centro del transportador se hace coincidir con el vértice del ángulo y la división que indica 0° con el lado donde se considera naciente el ángulo sobre la escala se obtiene la lectura en la marca que coincida con el otro lado del ángulo.

EJERCICIO 19

(I). 1. Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida, sin importar que no se encuentren orientados en la misma dirección o que sus lados no sean del mismo tamaño. Sin embargo, antes de cualquier medida (radianes o grados), es fundamental la definición: dos ángulos son congruentes si al superponerlos coinciden, es decir, si mediante giro o traslación se pueden hacer coincidir el uno con el otro.

3. Si se tiene un $\widehat{AOB}$ y se desea trazar el congruente $\widehat{PQR}$, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Se traza la recta $\overleftrightarrow{QR}$ marcando los puntos Q y R.

b) Con apoyo del compás en el $\widehat{AOB}$ haciendo centro en O se traza un arco de circunferencia de cualquier abertura a modo que corte a las semirrectas $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, puntos D y C respectivamente.

c) Con el compás, haciendo centro en Q y con la misma abertura, se traza un arco que corta a $\overleftrightarrow{QR}$ en el punto T.

d) Con la distancia CD como radio, colocar la punta del compás en el punto T y trazar un arco que corte al arco trazado en el inciso *c*) en donde la intersección de estos dos arcos se nombra como punto P.

e) Con la ayuda de la regla se une P con Q y de esta forma se obtiene el ángulo deseado.

f) $\widehat{AOB} \cong \widehat{PQR}$.

EJERCICIO 20

(I). l. El ángulo convexo

3. El ángulo obtuso

5. Ángulos consecutivos

(III). 1. El ángulo convexo, es aquel que tiene las prolongaciones de sus lados hacia el exterior. El ángulo cóncavo, es aquel que tiene las prolongaciones de sus lados hacia el interior, es decir, la diferencia radica en el sentido de las prolongaciones de sus lados.

3. Dos ángulos rectos dan lugar a un ángulo llano.

5. Es todo ángulo cuya medida es mayor que un ángulo llano (180°) y menor que un ángulo perígono (360°), es decir, su medida está comprendida entre 180° y 360°.

7. Dos ángulos son adyacentes cuando son consecutivos, es decir, tienen un lado en común y los dos lados no comunes son semirrectas opuestas; los ángulos adyacentes forman un ángulo colineal o llano (180°); por consecuencia los ángulos adyacentes son suplementarios.

EJERCICIO 21

(I). 1. Dos ángulos son complementarios cuando su suma es igual a 90°, es decir, un ángulo recto.

3. Dos ángulos son conjugados cuando su suma es igual a 360°, es decir, un ángulo perígono.

(II). 5. *a*) 30°

b) 60°

c) 120°

(III). 1. *a*) 67° *c*) 50°44′18″ *f*) 22°18′

2. *a*) 88° *d*) 46°57′06″ *e*) 92°31′

3. *a*) 174° *b*) 142°15′ *c*) 110°22′32″

EJERCICIO 22

(I) 3. $\measuredangle 2, \measuredangle 4, \measuredangle 6, \measuredangle 8 = 60°$

$\measuredangle 3, \measuredangle 5, \measuredangle 7 = 120°$

5. $\measuredangle 1, \measuredangle 3, \measuredangle 5, \measuredangle 7 = 126°$

$\measuredangle 2, \measuredangle 4, \measuredangle 6, \measuredangle 8 = 54°$

EJERCICIO 24

(1). 1. Figura cerrada, formada por tres rectas que se cortan dos a dos, es decir, formada por tres lados que forman a su vez tres ángulos, por lo que el triángulo es un subconjunto de los polígonos.

3. $\triangle ABC$

5. El triángulo isósceles tiene dos lados iguales.

7. El triángulo escaleno tiene sus tres lados desiguales.

9. Se denominan **triángulos oblicuángulos**.

EJERCICIO 25

(I). (3), (7), (5), (8), (6), (l), (2).

(II). 1. En un triángulo rectángulo u obtusángulo el circucentro es exterior al triángulo.

3. En cualquier triángulo el incentro es interior al triángulo.

EJERCICIO 26

(I). 1. Un ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.

3. El ángulo opuesto a la base mide 110°.

5. $\measuredangle QPR + \measuredangle PRQ = 130°$ y $\measuredangle PQR = 50°$.

(II). 1. Los ángulos interiores de cualquier triángulo suman dos ángulos rectos (180°).

3. Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

EJERCICIO 27

(I). 1. Un triángulo es congruente cuando sus lados y ángulos de uno son respectivamente iguales a los lados y ángulos del otro.

3. *a*) Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen iguales los dos catetos.

b) Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen, respectivamente iguales un cateto y un ángulo agudo.

c) Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen igual ambas hipotenusas y uno de los catetos.

d) Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen igual tanto la hipotenusa como un ángulo agudo.

5. *a*) Para comprobar que dos segmentos son iguales suele ser útil demostrar que se oponen a ángulos iguales en triángulos iguales.

b) Para comprobar que dos ángulos son iguales suele ser útil demostrar que dichos ángulos se oponen a lados iguales en triángulos iguales.

EJERCICIO 29

(I). 1. Se entiende por semejanza a las características y condiciones geométricas para reproducir las figuras con todos sus detalles, haciendo variar únicamente su tamaño y conservando su forma.

3. La semejanza satisface los caracteres de:

a) Idéntico o reflejo

b) Recíproco o simétrico

c) Transitivo

5. *Teorema recíproco fundamental de la semejanza de triángulos*

Todo triángulo semejante a otro es igual a uno de los triángulos que pueden obtenerse trazando una paralela a la base de éste.

7. *a*) Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen un ángulo agudo igual.

b) Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen los catetos proporcionales.

c) Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando tienen tanto la hipotenusa como un cateto proporcional.

(II). 4. La altura del poste es de 4 m.

5. La altura de la torre es de 14.4 m.

6. La anchura del río es de 52.5 m.

EJERCICIO 30

(I). 1. *a*) 7.937

b) 51.234

c) 38.418

3. El lado del cuadrado mide: 5.6568 m.

5. La longitud del rectángulo es: 12.3693 cm.

EJERCICIO 31

(II). 1. Área = 277.1858 cm^2, Perímetro = 95.5979 cm, Semiperímetro = 47.7989 cm.

3. Área = 62.3538 cm^2.

5. *a*) Área = 216

d) Área = 14.9812

EJERCICIO 32

(I). 1. Proviene de las raíces *polýs* que significa "muchos" y *gōnía* que significa "ángulos"; por lo tanto, es un trazo que contiene muchos ángulos.

3. Los lados, los ángulos internos y externos, los vértices y las diagonales.

5. Son las rectas que unen dos vértices no consecutivos del polígono.

7. Polígono regular.

(II). 1. En la figura son:

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FA}$.

Ángulos internos: $\measuredangle A$, $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$, $\measuredangle E$ y $\measuredangle F$.

Ángulos externos: $\measuredangle 1$, $\measuredangle 2$, $\measuredangle 3$, $\measuredangle 4$, $\measuredangle 5$ y $\measuredangle 6$.

Vértices: A, B, C, D, E y F.

Diagonales: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ y $\overline{AE}$.

3. Los polígonos convexos son los que tiene todos sus ángulos salientes, es decir, tiene todos sus ángulos menores que 180°.

5. El polígono de 9 lados tiene: 9 vértices, 9 ángulos internos y 9 ángulos externos.

EJERCICIO 33

(I). 1. *a*) 2 triángulos *c*) 7 triángulos *e*) 17 triángulos

3. *a*) dodecágono *d*) 13 lados *e*) 18 lados

5. *b*) 16 lados *d*) triángulo *f*) 24 lados

7. *a*) cero *b*) 4 diagonales *c*) 8 diagonales

9. *a*) 27 diagonales *c*) 104 diagonales *e*) 324 diagonales

11. *a*) cuadrilátero *c*) No es un polígono regular *f*) No es un polígono regular

EJERCICIO 34

(I). 1. Son los polígonos limitados por cuatro lados y forman entre sí cuatro ángulos.

3. *a*) Los **lados opuestos** son iguales y no tienen ningún vértice en común.

b) Los **lados consecutivos** son los que tienen un vértice en común.

c) Los **vértices** y **ángulos opuestos** son los que no pertenecen a un mismo lado, siendo los ángulos iguales.

d) La **suma de ángulos interiores** es igual a cuatro ángulos rectos (360°).

e) Los **ángulos adyacentes** a un mismo lado son suplementarios, es decir, suman 180°.

f) Las **diagonales** se cortan en su punto medio.

g) El **número total de diagonales** que pueden trazarse siempre son dos y se cortan en un punto interior.

h) Desde un vértice sólo puede trazarse una **diagonal**.

5. Los cuadrados.

7. El trapecio rectángulo.

10. Altura del trapecio.

EJERCICIO 35

(I). 1. La circunferencia es la frontera que separa la región interior de la exterior y el círculo es la región comprendida dentro de la circunferencia.

3. Una circunferencia o un círculo se denota con las letras del centro O y del radio r escritas de la siguiente manera: $c(O,r)$.

5. Es una porción de circunferencia determinada por dos de sus puntos llamados extremos del arco.

7. La diferencia es que uno es múltiplo del otro, es decir $2r = d$.

EJERCICIO 36

(I). 1. Es cuando la recta y la circunferencia tienen dos puntos comunes, la distancia de la recta al centro de la circunferencia es menor que su radio.

3. No existe relación.

EJERCICIO 37

(I). 1. Las principales figuras en el círculo son:

- segmento circular
- semicírculo
- sector circular
- cuadrante circular

- corona circular
- trapecio circular

3. Se le llama semicírculo a la mitad del círculo limitado por un diámetro y su arco de circunferencia respectivo.

5. Es el ángulo cuyo vértice coincide con algún punto de la circunferencia y sus lados son secantes a la misma.

EJERCICIO 38

(I). 1. La trigonometría estudia las relaciones existentes entre los elementos (lados y ángulos) de un triángulo.

3. Es una rama de la trigonometría que estudia los triángulos rectilíneos.

5. En la geometría es aceptado los ángulos positivos y negativos, en la trigonometría no.

En la geometría la amplitud de giro se limita a una vuelta (360°) en la trigonometría puede considerarse ilimitada.

7. - seno: es la razón entre el cateto opuesto a la hipotenusa.
   - coseno: es la razón entre el cateto adyacente a la hipotenusa.
   - tangente: es la razón entre el cateto opuesto al adyacente.
   - cotangente: es la razón entre el cateto adyacente al opuesto.
   - secante: es la razón entre la hipotenusa al cateto adyacente.
   - cosecante: es la razón entre la hipotenusa al cateto opuesto.

(II). 1. Para el $\sphericalangle\alpha$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{z}{y} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{y} \qquad \tan\alpha = \frac{z}{x}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{z} \qquad \sec\alpha = \frac{y}{x} \qquad \csc\alpha = \frac{y}{z}$$

Para el $\sphericalangle\beta$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{x}{y} \qquad \cos\beta = \frac{z}{y} \qquad \tan\beta = \frac{x}{z}$$

$$\cot\beta = \frac{z}{x} \qquad \sec\beta = \frac{y}{z} \qquad \csc\beta = \frac{y}{x}$$

EJERCICIO 39

(I). 1. *a*) $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$ $\tan a = \frac{3}{4}$ $\sec a = \frac{5}{4}$

$\cos a = \frac{4}{5}$ $\cot a = \frac{4}{3}$ $\csc a = \frac{5}{3}$

(II). 1. El ángulo debe ser de $26°23'16''$.

3. La longitud de sus lados iguales es 34.2259 cm.

5. La distancia $\overline{AB}$ es de 88.3883 millas.

EJERCICIO 40

(I). 1. *a*) $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ $\cot 30° = \sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\csc 30° = 2$

3. *a*) $\cot 135° = -1$ *c*) $\cot 315° = -1$

$\sec 135° = -\sqrt{2}$ $\sec 315° = \sqrt{2}$

$\csc 135° = \sqrt{2}$ $\csc 315° = -\sqrt{2}$

EJERCICIO 41

(I). 1. *a*) $\operatorname{sen}\theta = \frac{7}{\sqrt{85}}$ $\tan\theta = \frac{7}{6}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{85}}{6}$

$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{85}}$ $\cot\theta = \frac{6}{7}$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{85}}{7}$

c) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ $\sec\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\cot\theta = -2$ $\csc\theta = -\sqrt{5}$

d) $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{\sqrt{29}}$ $\tan\theta = \frac{5}{2}$ $\sec\theta = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$ $\cot\theta = \frac{2}{5}$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{29}}{5}$

f) $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{\sqrt{74}}$ $\tan\theta = \frac{7}{5}$ $\sec\theta = -\frac{\sqrt{74}}{5}$

$\cos\theta = -\frac{5}{\sqrt{74}}$ $\cot\theta = \frac{5}{7}$ $\csc\theta = \frac{\sqrt{74}}{7}$

3. *a*) $\operatorname{sen} A = \dfrac{7}{\sqrt{58}}$ $\operatorname{sen} B = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

$\cos A = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$ $\cos B = -\dfrac{2}{\sqrt{29}}$

$\tan A = \dfrac{7}{3}$ $\tan B = -\dfrac{5}{2}$

$\cot A = \dfrac{3}{7}$ $\cot B = -\dfrac{2}{5}$

$\sec A = \dfrac{\sqrt{58}}{3}$ $\sec B = -\dfrac{\sqrt{29}}{2}$

$\csc A = \dfrac{\sqrt{58}}{7}$ $\csc B = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$

c) $\operatorname{sen} A = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$ $\operatorname{sen} B = \dfrac{4}{\sqrt{65}}$

$\cos A = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos B = -\dfrac{7}{\sqrt{65}}$

$\tan A = 4$ $\tan B = -\dfrac{4}{7}$

$\cot A = \dfrac{1}{4}$ $\cot B = -\dfrac{7}{4}$

$\sec A = -\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ $\sec B = -\dfrac{\sqrt{65}}{7}$

$\csc A = -\dfrac{\sqrt{17}}{1}$ $\csc B = \dfrac{\sqrt{65}}{4}$

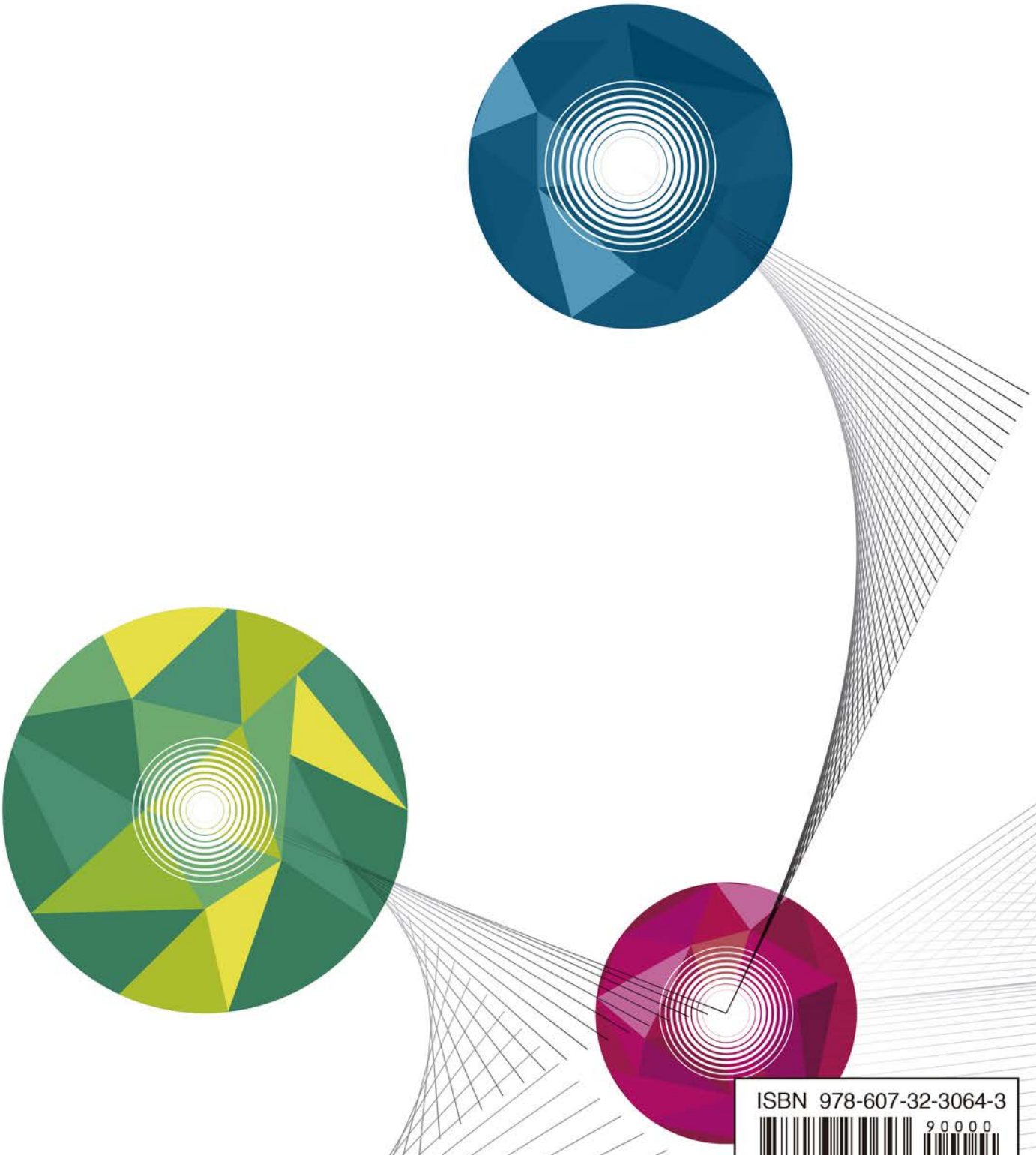
Apéndice A
Tablas de funciones trigonométricas naturales

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
0°	0'	.0000		.0000		1.000	1.0000	90°	0'
	10'	029	343.8	029	343.8	000	000		50'
	20'	058	171.9	058	171.9	000	000		40'
	30'	.0087	114.6	.0087	114.6	1.000	1.0000		30'
	40'	116	85.95	116	85.94	000	.9999		20'
	50'	145	68.76	115	68.75	000	999		10'
1°	0'	.0175	57.30	0.175	57.29	1.000	.9998	89°	0'
	10'	204	49.11	204	49.10	000	998		50'
	20'	233	42.98	233	42.96	000	997		40'
	30'	.0262	38.20	.0262	38.19	1.000	.9997		30'
	40'	291	34.38	291	34.37	000	996		20'
	50'	320	31.26	320	31.24	001	995		10'
2°	0'	.0349	28.65	.0349	28.64	1.001	.9994	88°	0'
	10'	378	26.45	378	26.43	001	993		50'
	20'	407	24.56	407	24.54	001	992		40'
	30'	.0436	22.93	.0437	22.00	1.001	.9990		30'
	40'	465	21.49	466	21.47	001	989		20'
	50'	494	20.23	495	20.21	001	988		10'
3°	0'	.0523	19.11	.0524	19.08	1.001	.9986	87°	0'
	10'	552	18.10	553	18.07	002	985		50'
	20'	581	17.20	582	17.17	002	983		40'
	30'	.0610	16.38	.0612	16.35	1.002	.9981		30'
	40'	649	15.04	641	15.60	002	980		20'
	50'	669	14.06	670	14.02	002	978		10'
4°	0'	.0698	14.34	.699	14.30	1.002	.9976	86°	0'
	10'	727	13.76	729	13.73	003	974		50'
	20'	756	13.23	758	13.20	003	971		40'
	30'	.0785	12.75	.0787	12.71	1.003	.9969		30'
	40'	814	12.39	816	12.35	003	967		20'
	50'	843	11.87	816	11.83	004	964		10'
5°	0'	.0872	11.47	.0875	11.43	1.004	.9962	85°	0'
	10'	001	11.10	994	11.00	004	959		30'
	20'	929	10.76	934	10.71	004	957		40'
	30'	.0958	10.43	.0963	10.39	1.005	.9954		30'
	40'	.0987	10.13	.0993	10.08	005	951		20'
	50'	.1016	9.839	.1022	9.788	005	948		10'
6°	0'	.1045	9.567	.1051	9.514	1.006	.9945	84°	0'
	10'	074	9.309	080	9.255	006	942		50'
	20'	103	9.065	119	9.010	006	939		40'
	30'	.1132	8.834	.1139	8.777	1.006	.9936		30'
	40'	161	8.614	169	8.556	007	932		20'
	50'	190	8.405	198	8.345	007	929		10'
7°	0'	.1219	8.206	.1228	8.144	1.008	.9925	83°	0'
	10'	248	8.016	257	7.953	008	922		50'
	20'	276	7.834	287	7.770	008	918		40'
	30'	.1305	7.661	.1317	7.596	1.009	.9914		30'
	40'	334	7.496	346	7.429	009	911		20'
	50'	363	7.337	376	7.269	009	907		10'
8°	0'	.1392	7.185	.1405	7.115	1.010	.9903	82°	0'
	10'	421	7.040	435	6.968	010	899		50'
	20'	449	6.900	465	6.827	011	894		40'
	30'	.1478	6.765	.1495	6.691	1.01	.9890		30'
	40'	507	6.636	524	6.561	012	886		20'
	50'	536	6.512	554	6.435	012	881		10'
9°	0'	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	81°	0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
9°	0'	.1564	6.392	.1584	6.314	1.012	.9877	87°	0'
	10'	593	277	614	197	013	872		50'
	20'	622	166	644	6.084	013	868		40'
	30'	.1650	6.059	.1673	5.96	1.014	.9863		30'
	40'	679	5.955	703	871	014	858		20'
	50'	708	855	733	769	01	853		10'
10°	0'	.1736	5.759	.1763	5.671	1.015	.9848	80°	0'
	10'	765	665	793	576	016	843		50'
	20'	794	575	823	485	016	838		40'
	30'	.1822	5.487	.1853	5.396	1.017	.9833		30'
	40'	851	403	883	309	018	827		20'
	50'	880	320	914	226	018	822		10'
11°	0'	.1908	5.241	.1944	5.145	1.019	.9816	79°	0'
	10'	937	164	.1974	5.066	019	811		50'
	20'	965	089	.2004	4.989	020	805		40'
	30'	.1994	5.016	.2035	4.915	1.020	.9799		30'
	40'	.2022	4.945	065	843	021	793		20'
	50'	051	876	095	773	022	787		10'
12°	0'	.2079	4.810	.2126	4.705	1.022	.9781	78°	0'
	10'	108	745	156	638	023	775		50'
	20'	136	682	186	574	024	769		40'
	30'	.2164	4.620	.2217	4.511	1.024	.9763		30'
	40'	193	560	247	449	025	757		20'
	50'	221	502	278	390	026	759		10'
13°	0'	.2250	4.445	.2309	4.331	1.026	.9744	77°	0'
	10'	278	390	339	275	027	737		50'
	20'	306	336	370	219	028	730		40'
	30'	.2334	4.284	.2401	4.165	1.028	.9724		30'
	40'	363	232	432	113	029	717		30'
	50'	391	182	462	061	030	710		10'
14°	0'	.2419	4.134	.2493	4.011	1.031	.9703	76°	0'
	10'	447	086	524	3.962	031	696		50'
	20'	476	4.039	555	914	032	689		40'
	30'	.2504	3.994	.2586	3.867	1.033	.9681		30'
	40'	532	959	617	821	034	674		20'
	50'	560	906	648	776	034	667		10'
15°	0'	.2588	3.864	.2679	3.732	1.035	.9659	75°	0'
	10'	616	822	711	689	036	652		50'
	20'	644	782	742	647	037	644		40'
	30'	.2672	3.742	.2773	3.606	1.038	.9636		30'
	40'	700	703	805	566	039	628		20'
	50'	728	665	836	526	039	621		10'
16°	0'	.2756	3.628	.2867	3.487	1.040	.9613	74°	0'
	10'	784	592	899	450	041	605		50'
	20'	812	556	931	412	042	596		40'
	30'	.2840	3.521	.2962	3.376	1.043	.9588		30'
	40'	868	487	.994	340	044	580		20'
	50'	896	453	.3026	305	045	572		10'
17°	0'	.2924	3.420	.3057	3.271	1.046	.9563	73°	0'
	10'	952	388	089	237	047	555		50'
	20'	.2979	357	121	204	048	546		40'
	30'	.3007	3.326	.3153	3.172	1.048	.9537		30'
	40'	035	295	185	140	049	528		20'
	50'	062	265	217	108	050	520		10'
18°	0'	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	72°	0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
18°	0'	.3090	3.236	.3249	3.078	1.051	.9511	72°	0'
	10'	118	207	281	047	052	502		50'
	20'	145	179	314	3.018	053	492		40'
	30'	.3173	3.152	.3346	2.989	1.054	.9483		30'
	40'	201	124	378	960	056	474		20'
	50'	228	098	411	932	057	465		10'
19°	0'	.3256	3.072	.3443	2.904	1.058	.9455	71°	0'
	10'	283	946	476	877	059	446		50'
	20'	311	3.021	508	450	060	436		40'
	30'	.3338	2.996	.3541	2.824	1.061	.9426		30'
	40'	365	971	574	798	062	417		20'
	50'	393	947	607	773	063	407		10'
20°	0'	.3420	2.924	.3640	2.747	1.064	.9397	70°	0'
	10'	448	901	673	723	065	387		50'
	20'	475	878	706	699	066	377		40'
	30'	.3502	2.855	.3739	2.675	1.068	.9367		30'
	40'	529	833	772	651	069	356		20'
	50'	557	812	805	628	070	346		10'
21°	0'	.3584	2.790	.3839	2.605	1.071	.9336	59°	0'
	10'	611	769	872	583	072	325		50'
	20'	638	749	906	560	074	315		40'
	30'	.3665	2.729	.3939	2.539	1.075	.9304		30'
	40'	692	709	.3973	517	076	293		20'
	50'	719	689	.4006	496	077	283		10'
22°	0'	.3746	2.669	.4040	2.475	1.079	.9272	68°	0'
	10'	773	650	074	455	080	261		50'
	20'	800	632	108	434	081	250		40'
	30'	.3827	2.613	.4142	2.414	1.082	.9239		30'
	40'	854	595	176	394	084	228		20'
	50'	881	577	210	375	085	216		10'
23°	0'	.3907	2.559	.4245	2.356	1.86	.9205	67°	0'
	10'	934	542	279	337	088	194		50'
	20'	961	525	314	318	089	182		40'
	30'	.3987	2.508	.4348	2.300	1.090	.9171		30'
	40'	.4014	491	383	282	092	159		20'
	50'	041	475	417	264	093	147		10'
24°	0'	.4067	2.459	.4452	2.246	1.095	.9135	66°	0'
	10'	094	443	487	229	090	124		50'
	20'	120	227	522	211	097	112		40'
	30'	.4147	2.411	.4557	2.194	1.099	.9100		30'
	40'	173	396	592	177	100	088		20'
	50'	200	381	628	161	102	075		10'
25°	0'	.4226	2.366	.4663	2.145	1.103	.9063	65°	0'
	10'	253	352	699	128	105	051		50'
	20'	279	337	734	112	106	038		40'
	30'	.4305	2.323	.4770	2.097	1.108	.9026		30'
	40'	331	309	806	081	109	013		20'
	50'	358	295	841	066	111	.9001		10'
26°	0'	.4384	2.281	.4877	2.050	1.113	.8988	64°	0'
	10'	410	268	913	035	114	975		50'
	20'	436	254	950	020	116	962		40'
	30'	.4462	2.241	.4986	2.006	1.117	.8949		30'
	40'	488	228	.5022	1.991	119	936		20'
	50'	514	215	059	977	121	923		10'
27°	0'	.4540	2.203	5095	1.963	1.122	.8910	63°	0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	

Grados		Sen	Csc	Tan	Cot	Sec	Cos		
27°	0'	.4540	2.203	.5095	1.963	1.122	.8910	63°	0'
	10'	566	190	132	949	124	897		50'
	20'	592	178	169	935	126	884		40'
	30'	.4617	2.166	.5206	1.921	1.127	.8870		30'
	40'	643	154	243	907	129	857		20'
	50'	669	142	280	894	131	843		10'
28°	0'	.4695	2.130	.5317	1.881	1.133	.8829	62°	0'
	10'	720	118	354	868	134	816		50'
	20'	746	107	362	855	136	802		40'
	30'	.4772	2.096	.5430	1.842	1.138	.8788		30'
	40'	797	085	467	829	140	774		20'
	50'	823	074	505	816	142	760		10'
29°	0'	.4848	2.063	.5543	1.804	1.143	.8746	61°	0'
	10'	874	052	581	792	145	732		50'
	20'	899	041	619	180	147	718		40'
	30'	.4924	2.031	.5658	1.767	1.149	.8704		30'
	40'	950	020	696	756	151	689		20'
	50'	.4975	010	135	144	153	675		10'
30°	0'	.5000	2.000	.5774	1.732	1.155	.8660	60°	0'
	10'	025	1.990	812	720	157	646		50'
	20'	050	980	851	709	159	631		40'
	30'	.5075	1.970	.5890	1.698	1.161	.8616		30'
	40'	100	961	930	686	163	601		20'
	50'	125	951	.5969	675	165	587		10'
31°	0'	.5150	1.942	.6000	1.664	1.167	.8572	59°	0'
	10'	175	932	048	653	169	557		50'
	20'	200	923	088	643	171	542		40'
	30'	.5225	1.914	.6128	1.632	1.173	.8526		30'
	40'	250	905	168	621	175	511		20'
	50'	275	896	208	611	177	496		10'
32°	0'	.5299	1.887	.6249	1.600	1.179	.8480	58°	0'
	10'	324	878	289	590	181	465		50'
	20'	348	870	330	580	184	450		40'
	30'	.5373	1.861	.6371	1.570	1.186	.8434		30'
	40'	398	853	412	560	188	418		20'
	50'	422	844	453	550	190	403		10'
33°	0'	.5446	1.836	.6494	1.540	1.102	.8307	57°	0'
	10'	471	828	536	530	195	371		50'
	20'	495	820	577	520	197	355		40'
	30'	.5519	1.812	.6619	1.511	1.199	.8339		30'
	40'	544	804	661	501	202	323		20'
	50'	568	796	703	1.492	204	307		10'
34°	0'	.5592	1.788	.6745	1.483	1.206	.8290	56°	0'
	10'	616	781	787	473	209	274		50'
	20'	640	773	830	464	211	258		40'
	30'	.5664	1.766	.6873	1.455	1.213	.8241		30'
	40'	688	758	916	446	216	225		20'
	50'	712	751	.6959	437	218	208		10'
35°	0'	.5736	1.743	.7002	1.428	1.221	.8192	55°	0'
	10'	760	736	046	419	223	175		50'
	20'	783	729	089	411	226	158		40'
	30'	.5807	1.722	.7133	1.402	1.228	.8141		30'
	40'	831	715	177	393	231	124		20'
	50'	854	708	221	385	233	107		10'
36°	0'	.5878	1.701	.7265	1.376	1.236	.8090	54°	0'
		Cos	Sec	Cot	Tan	Csc	Sen	Grados	



ISBN 978-607-32-3064-3

Visítenos en:
www.pearsonenespañol.com